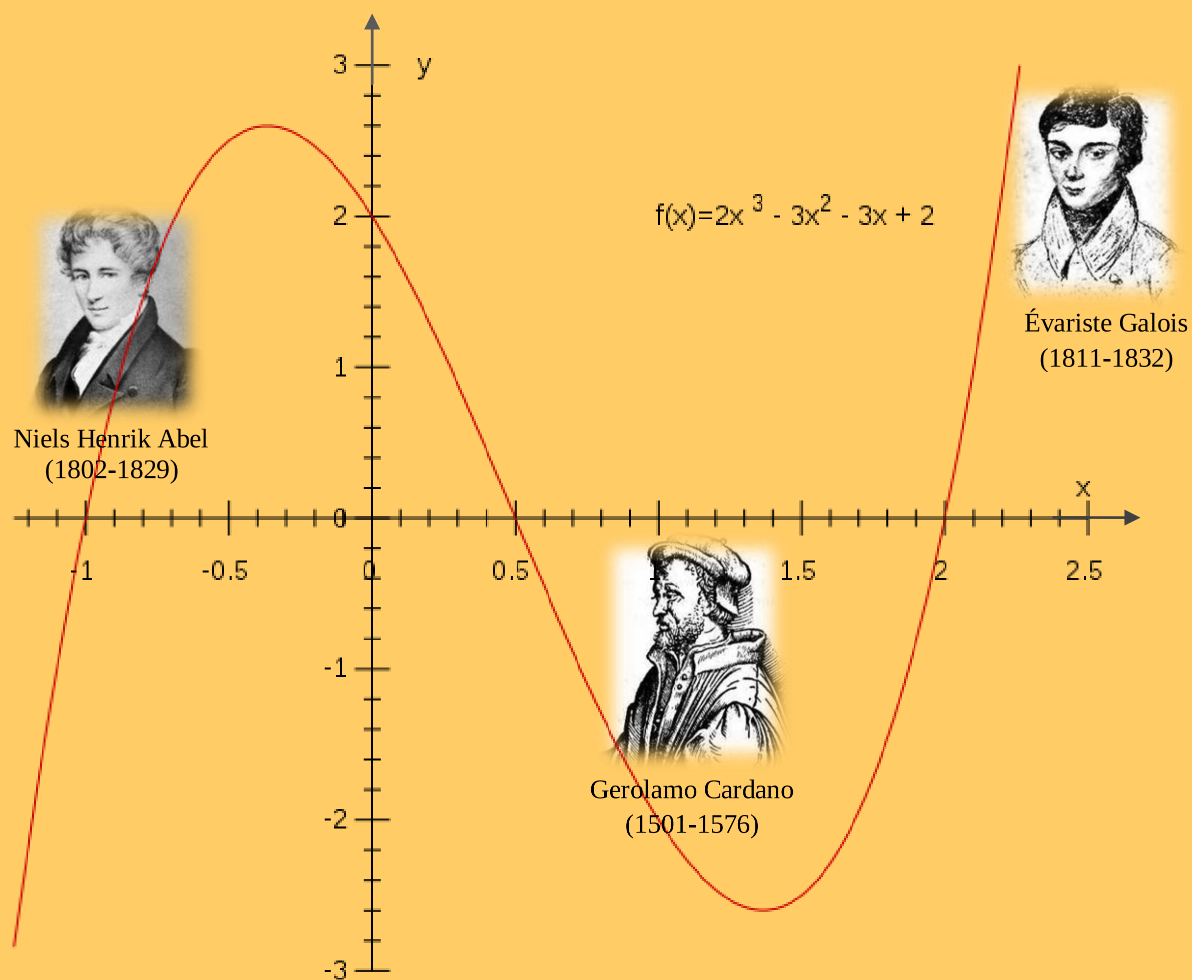
Diễn đàn MATHSCOPE

CHUYÊN ĐỀ :

PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH



THÁNG 6/2012

Diễn đàn MATHSCOPE

PHƯƠNG TRÌNH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Chủ biên: Nguyễn Anh Huy

26 - 7 - 2012

Mục lục

Lời nói đầu

Phương trình là một trong những phân môn quan trọng nhất của Đại số vì có những ứng dụng rất lớn trong các ngành khoa học. Sớm được biết đến từ thời xa xưa do nhu cầu tính toán của con người và ngày càng phát triển theo thời gian, đến nay, chỉ xét riêng trong Toán học, lĩnh vực phương trình đã có những cải tiến đáng kể, cả về hình thức (phương trình hữu tỉ, phương trình vô tỉ, phương trình mũ - logarit) và đối tượng (phương trình hàm, phương trình sai phân, phương trình đạo hàm riêng, . . .)

Còn ở Việt Nam, phương trình, từ năm lớp 8, đã là một dạng toán quen thuộc và được yêu thích bởi nhiều bạn học sinh. Lên đến bậc THPT, với sự hỗ trợ của các công cụ giải tích và hình học, những bài toán phương trình - hệ phương trình ngày càng được trau chuốt, trở thành nét đẹp của Toán học và một phần không thể thiếu trong các kì thi Học sinh giỏi, thi Đại học.

Đã có rất nhiều bài viết về phương trình - hệ phương trình, nhưng chưa thể đề cập một cách toàn diện về những phương pháp giải và sáng tạo phương trình. Nhận thấy nhu cầu có một tài liệu đầy đủ về hình thức và nội dung cho cả hệ chuyên và không chuyên, Diễn đàn MathScope đã tiến hành biên soạn quyển sách Chuyên đề phương trình - hệ phương trình mà chúng tôi hân hạnh giới thiệu đến các thầy cô giáo và các bạn học sinh.

Quyển sách này gồm 6 chương, với các nội dung như sau:
⁎ **Chương I: Đại cương về phương hữu tỉ** cung cấp một số cách giải tổng quát phương trình bậc ba và bốn, ngoài ra còn đề cập đến phương trình phân thức và những cách xây dựng phương trình hữu tỉ.
⁎ **Chương II: Phương trình, hệ phương trình có tham số** đề cập đến các phương pháp giải và biện luận bài toán có tham số ,cũng như một số bài toán thường gặp trong các kì thi Học sinh giỏi.
⁎ **Chương III: Các phương pháp giải phương trình** chủ yếu tổng hợp những phương pháp quen thuộc như bất đẳng thức, lượng liên hợp, hàm số đơn điệu, . . . với nhiều bài toán mở rộng nhằm giúp bạn đọc có cách nhìn tổng quan về phương trình.
Chương này không đề cập đến Phương trình lượng giác, vì vấn đề này đã có trong chuyên đề Lượng giác của Diễn đàn.
⁎ **Chương IV: Phương trình mũ – logarit** đưa ra một số dạng bài tập ứng dụng của hàm số logarit, với nhiều phương pháp biến đổi đa dạng như đặt ẩn phụ, dùng đẳng thức, hàm đơn điệu, ...
⁎ **Chương V: Hệ phương trình** là phần trọng tâm của chuyên đề. Nội dung của chương

bao gồm một số phương pháp giải hệ phương trình và tổng hợp các bài hệ phương trình hay trong những kì thi học sinh giỏi trong nước cũng như quốc tế.
⋇ **Chương VI:** Sáng tạo phương trình - hệ phương trình đưa ra những cách xây dựng một bài hay và khó từ những phương trình đơn giản bằng các công cụ mới như số phức, hàm hyperbolic, hàm đơn điệu, . . .

Ngoài ra còn có hai phần Phụ lục cung cấp thông tin ứng dụng phương trình, hệ phương trình trong giải toán và về lịch sử phát triển của phương trình.

Chúng tôi xin ngỏ lời cảm ơn tới những thành viên của Diễn đàn đã chung tay xây dựng chuyên đề. Đặc biệt xin chân thành cảm ơn thầy Châu Ngọc Hùng, thầy Nguyễn Trường Sơn, anh Hoàng Minh Quân, anh Lê Phúc Lữ, anh Phan Đức Minh vì đã hỗ trợ và đóng góp những ý kiến quý giá cho chuyên đề, bạn Nguyễn Trường Thành vì đã giúp ban biên tập kiểm tra các bài viết để có một tuyển tập hoàn chỉnh.

Niềm hi vọng duy nhất của những người làm chuyên đề là bạn đọc sẽ tìm thấy nhiều điều bổ ích và tình yêu toán học thông qua quyển sách này. Chúng tôi xin đón nhận và hoan nghênh mọi ý kiến xây dựng của bạn đọc để chuyên đề được hoàn thiện hơn. Mọi góp ý xin vui lòng chuyển đến anhhuy0706@gmail.com

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 11 tháng 7 năm 2012

Thay mặt nhóm biên soạn
Nguyễn Anh Huy

Các thành viên tham gia chuyên đề

Để hoàn thành được các nội dung trên, chính là nhờ sự cố gắng nỗ lực của các thành viên của diễn đàn đã tham gia xây dựng chuyên đề:

- Chủ biên: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM)
- Phụ trách chuyên đề: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM), Nguyễn An Vĩnh Phúc (TN Phổ thông Năng khiếu- TP HCM)
- Đại cương về phương trình hữu tỉ: Huỳnh Phước Trường (THPT Nguyễn Thượng Hiền – TP HCM), Phạm Tiến Kha (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM)
- Phương trình, hệ phương trình có tham số: thầy Nguyễn Trường Sơn (THPT Yên Mô A – Ninh Bình), Vũ Trọng Hải (12A6 THPT Thái Phiên - Hải Phòng), Đình Võ Bảo Châu (THPT chuyên Lê Quý Đôn - Vũng Tàu), Hoàng Bá Minh (12A6 THPT chuyên Trần Đại Nghĩa - TP HCM), Nguyễn Hoàng Nam (THPT Phước Thiền - Đồng Nai), Ong Thế Phương (11 Toán THPT chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai)
- Phương pháp đặt ẩn phụ: thầy Mai Ngọc Thi (THPT Hùng Vương - Bình Phước), thầy Nguyễn Anh Tuấn (THPT Lê Quảng Chí -Hà Tĩnh), Trần Trí Quốc (11TL8 THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên), Hồ Đức Khánh (10CT THPT chuyên Quảng Bình), Đoàn Thế Hoà (10A7 THPT Long Khánh - Đồng Nai)
- Phương pháp dùng lượng liên hợp: Ninh Văn Tú (THPT chuyên Trần Đại Nghĩa - TPHCM) , Đinh Võ Bảo Châu (THPT - chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu), Đoàn Thế Hòa (THPT Long Khánh - Đồng Nai)
- Phương pháp dùng bất đẳng thức: Nguyễn An Vĩnh Phúc (TN Phổ thông Năng khiếu- TP HCM), Phan Minh Nhật, Lê Hoàng Đức (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM), Đặng Hoàng Phi Long (10A10 THPT Kim Liên – Hà Nội), Nguyễn Văn Bình (11A5 THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi),
- Phương pháp dùng đơn điệu: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM), Hoàng Kim Quân (THPT Hồng Thái – Hà Nội), Đặng Hoàng Phi Long (10A10 THPT Kim Liên – Hà Nội)
- Phương trình mũ – logarit: Võ Anh Khoa, Nguyễn Thanh Hoài (Đại học KHTN- TP HCM), Nguyễn Ngọc Duy (11 Toán THPT chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai)
- Các loại hệ cơ bản: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong - TP HCM)

- Hệ phương trình hoán vị: thầy Nguyễn Trường Sơn (THPT Yên Mô A – Ninh Bình), Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong TP HCM), Nguyễn Đình Hoàng (10A10 THPT Kim Liên - Hà Nội)
- Phương pháp biến đổi đẳng thức: Nguyễn Đình Hoàng (10A10 THPT Kim Liên - Hà Nội), Trần Văn Lâm (THPT Lê Hồng Phong - Thái Nguyên), Nguyễn Đức Huỳnh (11 Toán THPT Nguyễn Thị Minh Khai - TP HCM)
- Phương pháp hệ số bất định: Lê Phúc Lữ (Đại học FPT – TP HCM), Nguyễn Anh Huy, Phan Minh Nhật (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong TP HCM)
- Phương pháp đặt ẩn phụ tổng - hiệu: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong TP HCM)
- Tổng hợp các bài hệ phương trình: Nguyễn Anh Huy (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong TP HCM), Nguyễn Thành Thi (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp), Trần Minh Đức (T1K21 THPT chuyên Hà Tĩnh – Hà Tĩnh), Võ Hữu Thắng (11 Toán THPT Nguyễn Thị Minh Khai – TP HCM)
- Sáng tạo phương trình: thầy Nguyễn Tài Chung (THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai), thầy Nguyễn Tất Thu (THPT Lê Hồng Phong - Đồng Nai), Nguyễn Lê Thuỳ Linh (10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong – TP HCM)
- Giải toán bằng cách lập phương trình: Nguyễn An Vĩnh Phúc (TN Phổ thông Năng khiếu-TP HCM)
- Lịch sử phát triển của phương trình: Nguyễn An Vĩnh Phúc (TN Phổ thông Năng khiếu-TP HCM), Nguyễn Hoàng Nam (THPT Phước Thiền - Đồng Nai)

CHƯƠNG I: ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Một số phương pháp giải phương trình bậc ba

★ Phương pháp phân tích nhân tử:
Nếu phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có nghiệm $x = r$ thì có nhân tử $(x - r)$ do đó có thể phân tích

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - r)[ax^2 + (b + ar)x + c + br + ar^2]$$

Từ đó ta đưa về giải một phương trình bậc hai, có nghiệm là

$$\frac{-b - ra \pm \sqrt{b^2 - 4ac - 2abr - 3a^2r^2}}{2a}$$

★ Phương pháp Cardano:
Xét phương trình bậc ba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1).
Bằng cách đặt $x = y - \dfrac{a}{3}$, phương trình (1) luôn biến đổi được về dạng chính tắc:

$$y^3 + py + q = 0(2)$$

Trong đó: $p = b - \dfrac{a^2}{3}, q = c + \dfrac{2a^3 - 9ab}{27}$
Ta chỉ xét $p, q \neq 0$ vì $p = 0$ hay $q = 0$ thì đưa về trường hợp đơn giản.
Đặt $y = u + v$ thay vào (2), ta được:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \text{ (3)}$$

Chọn u, v sao cho $3uv + p = 0$ (4).
Như vậy, để tìm u và v, từ (3) và (4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Theo định lí Viete, u^3 và v^3 là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0(5)$$

Đặt $\boxed{\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$

⁜ **Khi $\Delta > 0$, (5) có nghiệm**:
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$
Như vậy, phương trình (2) sẽ có nghiệm thực duy nhất:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

⁜ **Khi $\Delta = 0$, (5) có nghiệm kép:** $u = v = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$
Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm thực, trong đó một nghiệm kép.

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

⁜ **Khi $\Delta < 0$, (5) có nghiệm phức.**
Gọi u_0^3 là một nghiệm phức của (5), v_0^3 là giá trị tương ứng sao cho $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$.
Khi đó, phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.

$y_1 = u_0 + v_0$

$y_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$

$y_3 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$

★ **Phương pháp lượng giác hoá - hàm hyperbolic:**
Một phương trình bậc ba, nếu có 3 nghiệm thực, khi biểu diễn dưới dạng căn thức sẽ liên quan đến số phức. Vì vậy ta thường dùng phương pháp lượng giác hoá để tìm một cách biểu diễn khác đơn giản hơn, dựa trên hai hàm số cos và arccos
Cụ thể, từ phương trình $t^3 + pt + q = 0$ $(*)$ ta đặt $t = u\cos\alpha$ và tìm u để có thể đưa $(*)$ về dạng

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos 3\alpha = 0$$

Muốn vậy, ta chọn $u = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ và chia 2 vế của $(*)$ cho $\frac{u^3}{4}$ để được

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \frac{3q}{2p}.\sqrt{\frac{-3}{p}} = 0 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{3q}{2p}.\sqrt{\frac{-3}{p}}$$

Vậy 3 nghiệm thực là

$$t_i = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}.\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}.\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2i\pi}{3}\right] \text{ với } i = 0, 1, 2.$$

Lưu ý rằng nếu phương trình có 3 nghiệm thực thì $p < 0$ (điều ngược lại không đúng) nên công thức trên không có số phức.
Khi phương trình chỉ có 1 nghiệm thực và $p \neq 0$ ta cũng có thể biểu diễn nghiệm đó bằng công thức hàm arcosh và arsinh:

⁜$t = \frac{-2|q|}{q}.\sqrt{\frac{-p}{3}}\cosh\left[\frac{1}{3}.\text{arcosh}\left(\frac{-3|q|}{2p}.\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right]$ nếu $p < 0$ và $4p^3 + 27q^2 > 0$.

$*t = -2\sqrt{\frac{p}{3}}.\sinh\left[\frac{1}{3}.\text{arsinh}\left(\frac{3q}{2p}.\sqrt{\frac{3}{p}}\right)\right]$ nếu $p > 0$

Mỗi phương pháp trên đều có thể giải quyết phương trình bậc ba tổng quát. Nhưng mục đích của chúng ta trong mỗi bài toán luôn là tìm lời giải ngắn nhất, đẹp nhất. Hãy cùng xem qua một số ví dụ:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải phương trình $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$

Giải

Phương trình không có nghiệm hữu tỉ nên không thể phân tích nhân tử. Trước khi nghĩ tới công thức Cardano, ta thử quy đồng phương trình:

$$3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

Đại lượng $3x^2+3x+1$ gợi ta đến một hằng đẳng thức rất quen thuộc $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$. Do đó phương trình tương đương:

$$(x+1)^3 = -2x^3$$

hay

$$x + 1 = -\sqrt[3]{2}x$$

Từ đó suy ra nghiệm duy nhất $x = \frac{-1}{1+\sqrt[3]{2}}.\square$

⊛ Nhận xét: Ví dụ trên là một phương trình bậc ba có nghiệm vô tỉ, và được giải nhờ khéo léo biến đổi đẳng thức. Nhưng những bài đơn giản như thế này không có nhiều. Sau đây ta sẽ đi sâu vào công thức Cardano:

Bài 2: Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 4x + 11 = 0$

Giải

Đặt $x = y + 1$. Thế vào phương trình đầu bài, ta được phương trình:

$$y^3 + 1.y + 13 = 0$$

Tính $\Delta = 13^2 + \frac{4}{27}.1^3 = \frac{4567}{27} \geqslant 0$

Áp dụng công thức Cardano suy ra:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-13+\sqrt{\frac{4567}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-13-\sqrt{\frac{4567}{27}}}{2}}$$

Suy ra $x = \sqrt[3]{\frac{-13+\sqrt{\frac{4567}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-13-\sqrt{\frac{4567}{27}}}{2}} + 1.\square$

⊛ Nhận xét: Ví dụ trên là một ứng dụng cơ bản của công thức Cardano. Tuy nhiên công thức này không hề dễ nhớ và chỉ được dùng trong các kì thi Học sinh giỏi. Vì thế, có lẽ chúng ta sẽ cố gắng tìm một con đường "hợp thức hóa" các lời giải trên. Đó là phương pháp lượng giác hoá. Đầu tiên xét phương trình dạng $x^3 + px + q = 0$ với $p < 0$ và có 1 nghiệm thực:

Bài 3: Giải phương trình $x^3+3x^2+2x-1=0$

Giải

Đầu tiên đặt $x=y-1$ ta đưa về phương trình $y^3-y-1=0$ (1). Đến đây ta dùng lượng giác như sau:

Nếu $|y|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ suy ra $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right|<1$. Do đó tồn tại $\alpha\in[0,\pi]$ sao cho $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\cos\alpha$.

Phương trình tương đương:

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3\alpha-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha-1=0$$

hay

$$\cos 3\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ (vô nghiệm)}$$

Do đó $|y|\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Như vậy luôn tồn tại t thoả $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(t+\dfrac{1}{t})$ $(*)$. Thế vào (1) ta được phương trình

$$\frac{t^3}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}t^3}-1=0$$

Việc giải phương trình này không khó, xin dành cho bạn đọc. Ta tìm được nghiệm:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{23}\right)}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{23}\right)}}\right]-1\ \square$$

⊛ Nhận xét: Câu hỏi đặt ra là: "Sử dụng phương pháp trên như thế nào?". Muốn trả lời, ta cần làm sáng tỏ 2 vấn đề:

1) Có luôn tồn tại t thoả mãn cách đặt trên?

Đáp án là không. Coi $(*)$ là phương trình bậc hai theo t ta sẽ tìm được điều kiện $|y|\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Thật ra có thể tìm nhanh bằng cách dùng AM-GM:

$$|y|=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|t|+\frac{1}{|t|}\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy trước hết ta phải chứng minh (1) không có nghiệm $|y|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2) Vì sao có số $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$?

Ý tưởng của ta là từ phương trình $x^3+px+q=0$ đưa về một phương trình trùng phương theo t^3 qua cách đặt $x=k\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$. Khai triển và đồng nhất hệ số ta được $k=\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$

Sau đây là phương trình dạng $x^3+px+q=0$ với $p<0$ và có 3 nghiệm thực:

Bài 4: Giải phương trình $x^3-x^2-2x+1=0$

Giải

Đặt $y=x-\dfrac{1}{3}$. Phương trình tương đương:

$$y^3-\frac{7}{3}y+\frac{7}{27}=0(*)$$

Với $|y| < \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ thì $\left|\dfrac{3y}{2\sqrt{7}}\right| < 1$. Do đó tồn tại $\alpha \in [0, \pi]$ sao cho $\cos\alpha = \dfrac{3y}{2\sqrt{7}}$ hay $y = \dfrac{2\sqrt{7}\cos\alpha}{3}$.

Thế vào $(*)$, ta được:

$$\cos 3\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{14}$$

Đây là phương trình lượng giác cơ bản. Dễ dàng tìm được ba nghiệm của phương trình ban đầu:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\left[\frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}{3}\right] + \frac{1}{3}$$

$$x_{2,3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\left[\frac{\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{1}{3}$$

Do phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm phân biệt nên ta không cần xét trường hợp $|y| \geqslant \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. Bài toán được giải quyết. □

⊛ Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh phương trình vô nghiệm khi $|y| \geqslant \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ bằng cách đặt $y = \dfrac{\sqrt{7}}{3}(t + \dfrac{1}{t})$ giống như bài 3, từ đó dẫn tới một phương trình trùng phương vô nghiệm.

Tổng kết lại, ta dùng phép đặt ẩn phụ $y = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$ $(*)$ như sau:

⁎ Nếu phương trình có 1 nghiệm thực, chứng minh phương trình vô nghiệm khi $|y| < 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$, trường hợp còn lại dùng $(*)$ để đưa về phương trình trùng phương theo t.

⁎ Nếu phương trình có 3 nghiệm thực, chứng minh phương trình vô nghiệm khi $|y| \geqslant 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ bằng phép đặt $(*)$ (đưa về phương trình trùng phương vô nghiệm theo t). Khi $|y| \leqslant 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ thì đặt $\dfrac{|y|}{2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}} = \cos\alpha$, từ đó tìm α, suy ra 3 nghiệm y.

Còn khi $p > 0$ không khó chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất:

Bài 5: Giải phương trình $x^3 + 6x + 4 = 0$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta sẽ dùng phép đặt $x = k\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$ để đưa về phương trình trùng phương. Để ý phép đặt này không cần điều kiện của x, vì nó tương đương $k(t^2 - 1) - xt = 0$. Phương trình trên luôn có nghiệm theo t.

Như vậy từ phương trình đầu ta được

$$k^3\left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right) - 3k^3\left(t - \frac{1}{t}\right) + 6k\left(t - \frac{1}{t}\right) + 4 = 0$$

Cần chọn k thoả $3k^3 = 6k \Rightarrow k = \sqrt{2}$

Vậy ta có lời giải bài toán như sau:

⊛ Lời giải:

Đặt $x = \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ ta có phương trình

$$2\sqrt{2}\left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow t^6 - 1 + \sqrt{2}t^3 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

Lưu ý rằng $t_1.t_2 = -1$ theo định lý Viete nên ta chỉ nhận được một giá trị của x là
$x = t_1 + t_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\right)$. □

Bài 6: Giải phương trình $4x^3 - 3x = m$ với $|m| > 1$

Giải

Nhận xét rằng khi $|x| \leqslant 1$ thì $|VT| \leqslant 1 < |m|$ (sai) nên $|x| \geqslant 1$. Vì vậy ta có thể đặt $x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

Ta có phương trình tương đương:

$$\frac{1}{2}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) = m$$

Từ đó:

$$t = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2-1}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}}\right).$$

Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất.

Giả sử phương trình có nghiệm x_0 thì $x_0 \notin [-1, 1]$ vì $|x_0| > 1$. Khi đó:

$$4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0$$

hay

$$(x - x_0)(4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3) = 0$$

Xét phương trình:

$$4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3 = 0$$

có $\Delta' = 12 - 12x_0^2 < 0$ nên phương trình bậc hai này vô nghiệm.

Vậy phương trình đầu bài có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}}\right).\square$$

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$

b) $2x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = 0$

d) $8x^3 + 24x^2 + 6x - 10 - 3\sqrt{6} = 0$

Bài 2: Giải và biện luận phương trình:

$$4x^3 + 3x = m \text{ với } m \in \mathbb{R}$$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

[1] Phương trình dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0 \quad (1)$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow a(x^4 + 2x^2.k + k^2) + bx(x^2 + k) + (c - 2ak)x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a(x^2 + k)^2 + bx(x^2 + k) + (c - 2ak)x^2 = 0$$

Đến đây có hai hướng để giải quyết:

Cách 1: Đưa phương trình về dạng $A^2 = B^2$:

Thêm bớt, biến đổi vế trái thành dạng hằng đẳng thức dạng bình phương của một tổng, chuyển các hạng tử chứa x^2 sang bên phải.

Cách 2: Đặt $y = x^2 + k \Rightarrow y \geqslant k$

Phương trình (1) trở thành $ay^2 + bxy + (c - 2ak)x^2 = 0$

Tính x theo y hoặc y theo x để đưa về phương trình bậc hai theo ẩn x.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 24x + 9 = 0$ (1.1)

Cách 1:

$(1.1) \Leftrightarrow (x^4 + 9 + 6x^2) - 8(x^2 + 3) + 16x^2 = 16x^2 - 21x^2 + 6x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)^2 = x^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = x \\ x^2 - 4x + 3 = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Cách 2:

$(1.1) \Leftrightarrow (x^4 + 6x^2 + 9) - 8x(x^2 + 3) + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 - 8x(x^2 + 3) + 15x^2 = 0$

Đặt $y = x^2 + 3$. (1.1) trở thành: $y^2 - 8xy + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 3x)(y - 5x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x \\ y = 5x \end{array}\right.$

Với $\mathbf{y = 3x}$: Ta có $x^2 + 3 = 3x$: Phương trình vô nghiệm

Với $\mathbf{y = 5x}$: Ta có $x^2 + 3 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình (1.1) có tập nghiệm: $S = \left\{ \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}; \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2} \right\}$

Nhận xét: Mỗi phương pháp giải có lợi thế riêng. Với cách giải 1, ta sẽ tính được trực tiếp mà

không phải thông qua ẩn phụ. Với cách giải 2, ta sẽ có những tính toán đơn giản hơn và ít bị nhầm lẫn.

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:

1) $x^4 - 13x^3 + 46x^2 - 39x + 9 = 0$
2) $2x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 6x + 8 = 0$
3) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$
4) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$
5) $x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 27x + 81 = 0$

[2] Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = ex^2$ (2) **với** $ad = bc = m$

Cách 1: Đưa về dạng $A^2 = B^2$

$$(2) \Leftrightarrow (x + px + m)(x^2 + nx + m) = ex^2 (ad = bc = m, p = a + d, n = b + c)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m - \frac{n-p}{2}x\right)\left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m + \frac{n-p}{2}x\right) = ex^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{p+n}{2}x + m\right)^2 = \left[\left(\frac{n-p}{2}\right)^2 + e\right]x^2$$

Cách 2: Xét xem $x = 0$ có phải là nghiệm của phương trình không.

Trường hợp $x \neq 0$:

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{x} + p\right)\left(x + \frac{m}{x} + n\right) = e$$

Đặt $u = x + \dfrac{m}{x}$. Điều kiện: $|u| \geqslant 2\sqrt{|m|}$

(2) trở thành $(u + p)(u + n) = e$. Đến đây giải phương trình bậc hai theo u để tìm x.

Ví dụ: Giải phương trình: $(x+4)(x+6)(x-2)(x-12) = 25x^2$ (2.1)

Cách 1:

$$(2.1) \Leftrightarrow (x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24 + 12x)(x^2 - 2x + 24 - 12x) = 25x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24)^2 = 169x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 24 = 13x \\ x^2 - 2x + 24 = -13x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 15x + 24 = 0 \\ x^2 + 11x + 24 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = -3 \\ x = \dfrac{15 \pm \sqrt{129}}{2} \end{array}\right.$$

Cách 2:

$(2.1) \Leftrightarrow (x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

$x \neq 0 : (2.1) \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{24}{x} + 10\right)\left(x + \dfrac{24}{x} - 14\right) = 25$

Đặt $y = x + \dfrac{24}{x} \Rightarrow |y| \geqslant 4\sqrt{6}$. (2.1) trở thành:

$(y+10)(y-14) = 25 \Leftrightarrow (y+11)(y-15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -11 \\ y = 15 \end{array}\right.$

Với $\mathbf{y = -11}$: Ta có phương trình:

$x + \dfrac{24}{x} = -11 \Leftrightarrow x^2 + 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -8 \end{array}\right.$

Với $\mathbf{y = 15}$: Ta có phương trình:

$x + \dfrac{24}{x} = 15 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15 \pm \sqrt{129}}{2}$

Phương trình (2.1) có tập nghiệm $S = \left\{-3; -8; \dfrac{15 - \sqrt{129}}{2}; \dfrac{15 + \sqrt{129}}{2}\right\}$

⊛ Nhận xét: Trong cách giải 2, có thể ta không cần xét $x \neq 0$ rồi chia mà có thể đặt ẩn phụ $y = x^2 + m$ để thu được phương trình bậc hai ẩn x, tham số y hoặc ngược lại.

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$
2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) = 168x^2$
3) $(x+3)(x+2)(x+4)(x+6) = 14x^2$
4) $(x+6)(x+8)(x+9)(x+12) = 2x^2$
5) $18(x+1)(x+2)(x+5)(2x+5) = \dfrac{19}{4}x^2$

[3] Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ (3) **với** $a + b = c + d = p$

Ta có (3) $\Leftrightarrow (x^2 + px + ab)(x^2 + px + cd) = m$

Cách 1:

$$(3) \Leftrightarrow \left(x^2 + px + \frac{ab+cd}{2} + \frac{ab-cd}{2}\right)\left(x^2 + px + \frac{ab+cd}{2} - \frac{ab-cd}{2}\right) = m$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + px + \frac{ab+cd}{2}\right)^2 = m + \left(\frac{ab-cd}{2}\right)^2$$

Bài toán quy về giải hai phương trình bậc hai theo x.

Cách 2:

Đặt $y = x^2 + px$ Điều kiện: $y \geqslant -\dfrac{p^2}{4}$. (3) trở thành:$(y+ab)(y+cd) = m$

Giải phương trình bậc 2 ẩn y để tìm x.

Ví dụ: Giải phương trình: $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$ (3.1)

Cách 1:

Ta có

$$\begin{aligned}(3.1) &\Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)=8\\ &\Leftrightarrow (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1)=8\\ &\Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x+1=3\\ x^2+3x+1=-3\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-2=0\\ x^2+3x+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

CÁCH 2:

$(3.1) \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)=8$

Đặt $y=x^2+3x \Rightarrow y \geqslant -\frac{9}{4}$

(3.1) trở thành:

$$y(y+2)=8 \Leftrightarrow y^2+2y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\\ y=-4(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow y=2$$

Với $\mathbf{y=2}$: Ta có phương trình:

$$x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$

Phương trình (3.1) có tập nghiệm: $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}$

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:

1. $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8)=144$
2. $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9)=40$
3. $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{1}{20}\right)\left(x+\frac{4}{5}\right)=\frac{39879}{40000}$
4. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$
5. $(4x+3)^2(x+1)(2x+1)=810$

Nhận xét: Như dạng (2), ngoài cách đặt ẩn phụ trên, ta có thể đăt một trong các dạng ẩn phụ sau:

⋇ Đặt $y=x^2+px+ab$

⋇ Đặt $y=x^2+px+cd$

⋇ Đặt $y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

⋇ Đặt $y=x^2+px+\frac{ab+cd}{2}$

[4] Phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c \quad (c>0)$ (4)

Đặt $x=y-\frac{a+b}{2}$. (4) trở thành:

$$\left(y+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a-b}{2}\right)^4=c$$

Sử dụng khai triển nhị thức bậc 4, ta thu được phương trình:

$$2y^4 + 3(a-b)^2y^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c$$

Giải phương trình trùng phương ẩn y để tìm x.

Ví dụ: Giải phương trình: $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 82$ (4.1)

Đặt $y = x+3$. Phương trình (4.1) trở thành:
$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82$
$\Leftrightarrow (y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) = 82$
$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 - 80 = 0 \Leftrightarrow (y^2-4)(y^2+10) = 0$
$\Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$
Với $\mathbf{y} = \mathbf{2}$, ta được $x = -1$
Với $\mathbf{y} = -\mathbf{2}$, ta được $x = -5$
Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{-1; -5\}$

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1. $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$
2. $(x+\sqrt{2})^4 + (x+1)^4 = 33 + 12\sqrt{2}$
3. $(x+10)^4 + (x-4)^4 = 28562$
4. $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 90$

[5] Phương trình dạng $x^4 = ax^2 + bx + c$ (5)

Đưa (5) về dạng $A^2 = B^2$:

$$(5) \Leftrightarrow (x^2+m)^2 = (2m+a)x^2 + bx + c + m^2$$

Trong đó, m là một số cần tìm.
Tìm m để $f(x) = (2m+a)x^2 + bx + c + m^2$ có $\Delta = 0$. Khi đó, $f(x)$ có dạng bình phương của một biểu thức.

- Nếu $2m + a < 0$: (5) $\Leftrightarrow (x^2+m)^2 + g^2(x) = 0$ (với $f(x) = -g^2(x)$)$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + m = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
- Nếu$2m + a > 0$: (5) $\Leftrightarrow (x^2+m)^2 = g^2(x)$ (với $f(x) = g^2(x)$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + m = g(x) \\ x^2 + m = -g(x) \end{array}\right.$

Ví dụ: Giải phương trình: $x^4+x^2-6x+1=0$ (5.1)

Ta có:

$$(5.1)\Leftrightarrow x^4+4x^2+4=3x^2+6x+3\Leftrightarrow (x^2+2)^2=3(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=\sqrt{3}(x+1)\\ x^2+2=-\sqrt{3}(x+1)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{3}x+2-\sqrt{3}=0\\ x^2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2}\\ x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình (5.1) có tập nghiệm: $S=\left\{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2};\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{4\sqrt{3}-5}}{2}\right\}$

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1. $x^4-19x^2-10x+8=0$
2. $x^4=4x+1$
3. $x^4=8x+7$
4. $2x^4+3x^2-10x+3=0$
5. $(x^2-16)^2=16x+1$
6. $3x^4-2x^2-16x-5=0$

Nhận xét: Phương trình dạng $x^4=ax+b$ được giải theo cách tương tự.
Phương trình $\Delta=0$ là phương trình bậc ba với cách giải đã được trình bày trước. Phương trình này có thể cho 3 nghiệm m, cần lựa chọn m sao cho việc tính toán là thuận lợi nhất. Tuy nhiên, dù dùng nghiệm m nào thì cũng cho cùng một kết quả.

[6] **Phương trình dạng** $af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0$ (6)

Cách 1: Xét $g(x)=0$, giải tìm nghiệm và thử lại vào (6).
Trường hợp $g(x)\neq 0$: $\Leftrightarrow a\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^2+b.\dfrac{f(x)}{g(x)}+c=0$
Đặt $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, giải phương trình bậc hai $ay^2+by+c=0$ rồi tìm x.
Cách 2: Đặt $u=f(x),v=g(x)$, phương trình trở thành

$$au^2+buv+cv^2=0\ (6*)$$

Xem (6∗) là phương trình bậc hai theo ẩn u, tham số v. Từ đó tính u theo v.

Ví dụ: Giải phương trình: $20(x-2)^2-5(x+1)^2+48(x-2)(x+1)=0$ (6.1)

Đặt $u = x - 2, v = x + 1$. Phương trình (6.1) trở thành:

$$20u^2 + 48uv - 5v^2 = 0 \Leftrightarrow (10u - v)(2u + 5v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10u = v \\ 2u = -5v \end{array}\right.$$

⁎ Với $10u = v$, ta có: $10(x-2) = x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

⁎ Với $2u = -5v$, ta có: $2(x-2) = -5(x+1) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{7}$

Vậy phương trình (6.1) có tập nghiệm: $S = \left\{\dfrac{7}{3}; -\dfrac{1}{7}\right\}$

⊛ Nhận xét: Nếu chọn $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ Với $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số bất kì ($g(x) \neq 0$), ta sẽ tạo được một phương trình. Không chỉ là phương trình hữu tỉ, mà còn là phương trình vô tỉ.

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1. $(x-5)^4 - 12(x-2)^4 + 4(x^2 - 7x + 10)^2 = 0$
2. $(x-2)^4 + 3(x+3)^4 - 4(x^2 + x - 6)^2 = 0$
3. $4(x^3 - 1) + 2(x^2 + x + 1)^2 - 4(x-1)^2 = 0$
4. $2(x^2 - x + 1)^2 + 5(x+1)^2 + 14(x^3 + 1) = 0$
5. $(x-10)^4 - 15(x+5)^4 + 4(x^2 - 5x - 50)^2 = 0$

[7] Phương trình bậc bốn tổng quát $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (7)

Phân tích các hạng tử bậc 4, 3, 2 thành bình phương đúng, các hạng tử còn lại chuyển sang vế phải:

$$\begin{aligned} (7) &\Leftrightarrow 4a^2x^4 + 4bax^3 + 4cax^2 + 4dax + 4ae = 0 \\ &\Leftrightarrow (2ax^2 + bx)^2 = (b^2 - 4ac)x^2 - 4adx - 4ae \end{aligned}$$

Thêm vào hai vế một biểu thức $2(2ax^2 + bx)y + y^2$ (y là hằng số) để vế trái thành bình phương đúng, còn vế phải là tam thức bậc hai theo x:

$$f(x) = (b^2 - 4ac - 4ay)x^2 + 2(by - 2ad)x - 4ae + y^2$$

Tính y sao cho vế phải là một bình phương đúng. Như vậy, Δ của vế phải bằng 0. Như vậy ta phải giải phương trình $\Delta = 0$. Từ đó ta có dạng phương trình $A^2 = B^2$ quen thuộc.

Ví dụ: Giải phương trình $x^4 - 16x^3 + 66x^2 - 16x - 55 = 0$ (7.1)

$$\begin{aligned} (7.1) &\Leftrightarrow x^4 - 16x^3 + 64x^2 = -2x^2 + 16x + 55 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 8x)^2 + 2y(x^2 - 8x) + y^2 = (2y - 2)x^2 + (16 - 16y)x + 55 + y^2 \end{aligned}$$

Giải phương trình $\Delta = 0 \Leftrightarrow (8 - 8y)^2 - (55 + y^2)(2y - 2) = 0$ tìm được $y = 1, y = 3, y = 29$. Trong các giá trị này, ta thấy giá trị $y = 3$ là thuận lợi nhất cho việc tính toán.

Như vậy, chọn $y = 3$, ta có phương trình:

$$(x^2-8x+3)^2 = 4(x-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+3 = 2(x-4) \\ x^2-8x+3 = -2(x-4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x+11=0 \\ x^2-6x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \pm \sqrt{14} \\ x = 5 \pm \sqrt{14} \end{array}\right.$$

Phương trình (7.1) có tập nghiệm $S = \left\{3+\sqrt{14}; 3-\sqrt{14}; 5+\sqrt{14}; 5-\sqrt{14}\right\}$

⊛ Nhận xét: Ví dụ trên cho ta thấy phương trình $\Delta = 0$ có nhiều nghiệm. Có thể chọn $y = 1$ nhưng từ đó ta có phương trình $(x^2-8x+1)^2 = 56$ thì không thuận lợi lắm cho việc tính toán, tuy nhiên, kết quả vẫn như nhau.

Một cách giải khác là từ phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ đặt $x = t - \dfrac{a}{4}$, ta sẽ thu được phương trình khuyết bậc ba theo t, nghĩa là bài toán quy về giải phương trình $t^4 = at^2+bt+c$.

Bài tập tự luyện

1. $x^4-14x^3+54x^2-38x-11=0$
2. $x^4-16x^3+57x^2-52x-35=0$
3. $x^4-6x^3+9x^2+2x-7=0$
4. $x^4-10x^3+29x^2-20x-8=0$
5. $2x^4-32x^3+127x^2+38x-243=0$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

[1] Phương trình chứa ẩn ở mẫu cơ bản

Đặt điều kiện xác định cho biểu thức ở mẫu. Quy đồng rồi giải phương trình.

Ví dụ: Giải phương trình: $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{x}{2x-1} = 2$ (1.1)

Điều kiện: $x \neq 2; x \neq \dfrac{1}{2}$.

$$(1.1) \Leftrightarrow \frac{2x-1+x(2-x)}{(2-x)(2x-1)} = 2 \Leftrightarrow 2x-1+2x-x^2 = 2(4x-2-2x^2+x)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x=1 (\text{thỏa điều kiện})$$

Vậy phương trình (1.1) có tập nghiệm $S = \{1\}$

[2] Phương trình dạng $x^2 + \dfrac{a^2x^2}{(x+a)^2} = b$ (2)

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \left[x - \frac{ax}{(x+a)}\right]^2 + 2x.\frac{ax}{x+a} = b$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2 + 2a.\frac{x^2}{x+a} + a^2 = b + a^2$$

Đặt $y = \dfrac{x^2}{x+a}$. Giải phương trình bậc hai theo y để tìm x.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$ (2.1)

Điều kiện: $x \neq -3$.

$$(2.1) \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 6.\frac{x^2}{x+3} = 7$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6.\frac{x^2}{x+3} = 7$$

Đặt $y = \dfrac{x^2}{x+3}$. Ta có phương trình

$$y^2 + 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -7 \end{array}\right.$$

⁎ Nếu $y = 1$: Ta có phương trình $x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

⁎ Nếu $y = -7$: Ta có phương trình $x^2 + 7x + 21 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình (2.1) có tập nghiệm: $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

⊛ Nhận xét: Dựa vào cách giải trên, ta có thể không cần phải đặt ẩn phụ mà thêm bớt hằng số để tạo dạng phương trình quen thuộc $A^2 = B^2$

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:

1. $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$
2. $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$
3. $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x-3)^2} = 14$
4. $\dfrac{25}{x^2} - \dfrac{49}{(x-7)^2} = 1$
5. $\dfrac{9}{4(x+4)^2} + 1 = \dfrac{8}{(2x+5)^2}$

[3] Phương trình dạng $\dfrac{x^2+nx+a}{x^2+mx+a} + \dfrac{x^2+qx+a}{x^2+px+a} = b$ (3)

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + mx + a \neq 0 \\ x^2 + px + a \neq 0 \end{cases}$

Xét xem $x = 0$ có phải là nghiệm phương trình không.

Trường hợp $x \neq 0$:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x+\frac{a}{x}+n}{x+\frac{a}{x}+m}+\frac{x+\frac{a}{x}+q}{x+\frac{a}{x}+p}=b$$

Đặt $y=x+\frac{a}{x}$. Điều kiện: $|y| \geqslant 2\sqrt{|a|}$ ta có phương trình

$$\frac{y+n}{y+m}+\frac{y+q}{y+p}=b$$

Giải phương trình ẩn y sau đó tìm x.

Ví dụ: Giải phương trình: $\frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}-\frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5}=-\frac{1}{4}$ (3.1)

Điều kiện: $x \neq 1, x \neq 5$.
$x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
Xét $x \neq 0$:

$$(3.1) \Leftrightarrow \frac{x+\frac{5}{x}-3}{x+\frac{5}{x}-4}-\frac{x+\frac{5}{x}-5}{x+\frac{5}{x}-6}=-\frac{1}{4}$$

Đặt $y=x+\frac{5}{x} \Rightarrow |y| \geqslant 2\sqrt{5}, y \neq 6$. Phương trình (3.1) trở thành:

$$\frac{y-3}{y-4}-\frac{y-5}{y-6}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{y^2-10y+24}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow y^2-10y+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \text{ (loại)} \\ y=8 \end{array}\right.$$

Từ đó ta có phương trình

$$x+\frac{5}{x}=8 \Leftrightarrow x^2-8x+5=0 \Leftrightarrow x=4 \pm \sqrt{11}$$

Vậy phương trình (3.1) có tập nghiệm: $S=\left\{4+\sqrt{11}; 4-\sqrt{11}\right\}$
⊛ Nhận xét: Các dạng phương trình sau được giải một cách tương tự:
• Dạng 1: $\frac{mx}{ax^2+bx+d}+\frac{nx}{ax^2+cx+d}=p$
• Dạng 2: $\frac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c}+\frac{px}{ax^2+qx+c}=b$

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$
2) $\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6$
3) $\frac{3x}{x^2-3x+1}+\frac{7x}{x^2+x+1}=-4$
4) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+5}$
5) $\frac{x^2+5x+3}{x^2-7x+3}+\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+3}=7$

Tổng kết

Qua các dạng phương trình trên, ta thấy phương trình hữu tỉ thường được giải bằng một trong các phương pháp:

[**1.**] Đưa về phương trình tích
[**2.**] Đặt ẩn phụ hoàn toàn
[**3.**] Đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trình
[**4.**] Đưa về lũy thừa đồng bậc (thường là dạng $A^2 = B^2$)
[**5.**] Chia tử và mẫu cho cùng một số
[**6.**] Thêm bớt để tạo thành bình phương đúng

Tuy nhiên, có một số dạng phương trình có những phương pháp giải đặc trưng. Những phương trình này sẽ được trình bày cụ thể hơn ở những phần khác.

Bài tập tổng hợp phần phương trình hữu tỉ

Phần 1:
1) $x^3 - 3x^2 + 18x - 36 = 0$
2) $8x^2 - 6x = \dfrac{1}{2}$
3) $x^3 - 4x^2 - 4x + 8 = 0$
4) $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$
5) $x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

Phần 2:
1) $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$
2) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$
3) $x^4 + (x - 1)(3x^2 + 2x - 2) = 0$
4) $x^4 + (x + 1)(5x^2 - 6x - 6) = 0$
5) $x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0$
6) $(x^2 - 16)^2 = 16x + 1$
7) $(x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2$
8) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 13\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
9) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2 = \dfrac{40}{9}$
10) $\dfrac{x(3-x)}{x-1}\left(x + \dfrac{3-x}{x-1}\right) = 15$
11) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{x+7} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x+6}$

XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ

Bên cạnh việc xây dựng phương trình từ hệ phương trình, việc xây dựng phương trình từ những đẳng thức đại số có điều kiện là một trong những phương pháp giúp ta tạo ra những dạng phương trình hay và lạ. Dưới đây là một số đẳng thức đơn giản.

4.1 Từ đẳng thức "$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ (1) ":

Ví dụ: Giải phương trình: $(x-2)^3+(2x-4)^3+(7-3x)^3=1$ (1.1)

Nhận xét: Nếu đặt $a=x-2, b=2x-4, c=7-3x$. Khi đó ta có phương trình: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$. Từ đẳng thức (1), dễ dàng suy ra $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. Từ đó, ta có lời giải:
(1) $\Leftrightarrow (x-2)^3+(2x-4)^3+(7-3x)^3=[(x-2)+(2x-4)+(7-3x)]^3$

$$\Leftrightarrow (3x-6)(3-x)(5-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (1.1) có tập nghiệm: $S=\left\{2;3;\dfrac{5}{2}\right\}$

Với bài toán trên, cách tự nhiên nhất có lẽ là khai triển rồi thu về phương trình bậc ba. Tuy nhiên, việc khai triển có thể không còn hiệu quả với bài toán sau:

Ví dụ: Giải phương trình: $(x^2-4x+1)^3+(8x-x^2+4)^3+(x-5)^3=125x^3$ (1.2)

4.2 Từ mệnh đề "$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$ (2) ":

Ví dụ: Giải phương trình: $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{2x+7}+\dfrac{1}{5x+8}=\dfrac{1}{8x+7}$ (2.1)

Điều kiện: $x\neq 8, x\neq -\dfrac{7}{2}, x\neq -\dfrac{8}{5}, x\neq -\dfrac{7}{8}$

Từ bài toán (2), ta có:

$$(2.1) \Leftrightarrow (x-8+2x+7)(x-8+5x+8)(2x+7+5x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=0 \\ x=-\dfrac{15}{7} \end{array}\right.$$

Phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{\dfrac{1}{3};0;-\dfrac{15}{7}\right\}$

4.3 Từ đẳng thức "$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (3) ":

Ví dụ: Giải phương trình $54x^3-9x+\sqrt{2}=0$ (3.1)

Ta tìm cách viết vế trái của phương trình dưới dạng $x^3+a^3+b^3-3abx$. Như vậy thì a,b là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3+b^3=\dfrac{\sqrt{2}}{54} \\ a^3.b^3=\dfrac{1}{18^3} \end{cases}$$

$\Rightarrow a^3, b^3$ là nghiệm của phương trình

$$t^2 - \frac{\sqrt{2}}{54}t + \frac{1}{18^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{54\sqrt{2}} \Rightarrow a = b = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$(x + a + b)\left(x^2 + a^2 + b^2 - a\,x - bx - ab\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\left(x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}x + \frac{1}{18}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy (3.1) có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{2}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}$

4.4 Từ bài toán "Nếu $xyz = 1$ và $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ thì $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$ (4) ":

Ví dụ: Giải phương trình: $\frac{1}{10x^2 - 11x + 3} = \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{5x - 3} + 10x^2 - 18x + 7$ (4.1)

Điều kiện: $x \neq \frac{3}{5}, x \neq \frac{1}{2}$

Nhận xét: Nếu đặt $a = 2x - 1, b = 5x - 3, c = \frac{1}{10x^2 - 11x + 3}$

Thì ta có: $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Từ đó (3.1) $\Leftrightarrow (2x - 1 - 1)(5x - 3 - 1)\left(\frac{1}{10x^2 - 11x + 3} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{4}{5} \\ 10x^2 - 11x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{4}{5} \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{20} \end{array}\right.$$

Phương trình (3.1) có tập nghiệm: $S = \left\{1; \frac{4}{5}; \frac{11 \pm \sqrt{41}}{20}\right\}$

Qua các ví dụ trên, ta có thể hình dung cơ bản việc sử dụng đẳng thức để xây dựng phương trình. Hi vọng dựa vào vốn hiểu biết và khả năng sáng tạo của mình, bạn đọc có thể tạo ra những phương trình đẹp mắt và độc đáo hơn nữa. Sau đây là một số bài tập tự luyện từ các đẳng thức khác.

Bài tập tự luyện

1. $(x-2)^6 + (x^2 - 5x + 4)^3 = (2x^2 + 3)^3 + (5 - 9x)^3$
2. $(x^2 - 2x + 3)^5 + (8x - x^2 + 7)^5 = (9x + 5)^5 + (5 - 3x)^5$
3. $(x^3 - 5x + 4)^2(12 - 7x - 5x^2) + (x^3 + 2x^2 + 7)(7x^2 + 12x - 9) = (x^3 + 7x^2 + 7x - 5)^2(2x^2 + 5x + 3)$
4. $(x-5)^4(4x - x^2) + (2x + 7)^4(x^2 - 3x + 12) = (x^2 - 2x + 7)^4(12 + x)$
5. $\frac{(x^2 - 5x + 3)^3}{(4 - 9x)(x^2 - 12x + 7)} + \frac{(x^2 + 4x - 1)^3}{(9x - 4)(x^2 - 3x + 3)} + \frac{(7x - 4)^3}{(12x - 7 - x^2)(-x^2 + 3x - 3)} = 7$

6. $\dfrac{1}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+8x+15}+\dfrac{1}{x^2+12x+35}+\dfrac{1}{x^2+16x+63}=5$
7. $(x^2-8x+5)^7+(7x-8)^7=(x^2-x-3)^7$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Nhà toán học Abel đã chứng minh rằng không có công thức nghiệm tổng quát cho phương trình bậc cao (>4). Đây cũng không phải là dạng toán quen thuộc ở phổ thông. Vì thế bài viết này chỉ đề cập đến một số phương trình bậc cao đặc biệt, có thể giải bằng biến đổi sơ cấp.

Bài 1: Giải phương trình $x^5-x^4-x^3-11x^2+25x-14=0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$(x^5-2x^4)+(x^4-2x^3)+(x^3-2x^2)+(-9x^2+18x)+(7x-14)=0$$
$$(x-2)(x^4+x^3+x^2-9x+7)=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \vee x^4+x^3+x^2-9x+7=0\ (*)$$

Xét (*) ta có

$$(*)\Leftrightarrow (x^4+x^3+x^2-9x+6)+1=0$$
$$(x^4-x^3+2x^3-2x^2+3x^2-3x-6x+6)+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^3+3x+6)+1=0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2\}$ $\square$

Bài 2: Giải phương trình $x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$ $(*)$

Giải

Rõ ràng ta không thể đoán nghiệm của phương trình này vì bậc cao và hệ số xấu. Một cách tự nhiên ta đặt $\sqrt{6}=a$. Lưu ý rằng ta hi vọng có thể đưa (*) về phương trình bậc hai theo a, do đó ta phân tích $7=a^2+1$. Công việc còn lại là giải phương trình này:
Đặt $\sqrt{6}=a$, khi đó

$$(*)\Leftrightarrow x^6-x^2(a^2+1)+a=0\Leftrightarrow a^2x^2-a+x^2-x^6=0\ (*)$$

$(*)$ có: $\triangle=1+4x^2(x^6-x^2)=(2x^4-1)^2$ nên có nghiệm:

$$\begin{cases} a_1=x^2\\ a_2=\dfrac{1-x^4}{x^2}\end{cases}$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\sqrt{6} \\ 1-x^4=\sqrt{6}x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt[4]{6} \\ x=\pm\sqrt{\sqrt{\dfrac{5}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\pm\sqrt[4]{6};\ \pm\sqrt{\sqrt{\dfrac{5}{2}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}}\right\}$. □

Bài 3: Giải phương trình $x^6-15x^2+\sqrt{68}=0\ (*)$

Giải

Do $x=0$ không thoả (*) nên $x\neq 0$. Viết lại (*) dưới dạng

$$x^3+\frac{\sqrt{68}}{x^3}=\frac{15}{x}\Leftrightarrow x^3+\frac{2\sqrt{17}}{x^3}=\frac{17-2}{x}$$

Đặt $a=\sqrt{17}>0$ ta có phương trình

$$x^3+\frac{2a}{x^3}=\frac{a^2-2}{x}\Leftrightarrow x^2a^2-2a-x^6-2x^2=0\ (**)$$

Coi (**) là phương trình ẩn a ta tìm được nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} a=-x^2 \text{ (loại do } a>0) \\ a=\dfrac{2+x^4}{x^2} \end{array}\right.$$

Vậy ta có $\sqrt{17}=\dfrac{2+x^4}{x^2}\Leftrightarrow x^4-\sqrt{17}x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{\sqrt{17}\pm 3}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}\pm 3}{2}}$

Kết luận: (*) có tập nghiệm $S=\left\{\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}\pm 3}{2}}\right\}$ □

Bài 4: Chứng minh phương trình $x^5-5x^4+30x^3-50x^2+55x-21=0$ có nghiệm duy nhất

$$x=1+\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{16}$$

Giải

Đặt $f(x)=x^5-5x^4+30x^3-50x^2+55x-21$.
Ta có $f'(x)=5x^4-20x^3+90x^2-100x+55=5(x^2-2x+3)^2+10(2x-1)^2>0\ \forall x$, do đó phương trình $f(x)=0$ có không quá 1 nghiệm.
Ta sẽ chứng minh nghiệm đó là $x=1+\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{16}$:
Đặt

$$\begin{aligned} & x=1+\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{16} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[5]{2}x=\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}-2 \\ & \Leftrightarrow x+\sqrt[5]{2}x=2\sqrt[5]{2}-1\Leftrightarrow x+1=\sqrt[5]{2}(2-x) \\ & \Leftrightarrow (x+1)^5=2(2-x)^5 \end{aligned}$$

Khai triển biểu thức trên, sau đó rút gọn, ta được phương trình:

$$x^5-5x^4+30x^3-50x^2+55x-21=0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 5: Chứng minh phương trình sau có 7 nghiệm thực:

$$g(x) = x^9 - 9x^7 + 3x^6 + 27x^5 - 18x^4 - 27x^3 + 27x^2 - 1 = 0 \ (*)$$

Giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ thì $g(x) = f(f(x))$. Ta sẽ tìm nghiệm của $g'(x) = f'(x).f'(f(x))$:
⋇ Nghiệm của $f'(x)$ là: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
⋇ Để tìm nghiệm của $f'(f(x))$ ta tìm nghiệm của $f(x) = -1$ và $f(x) = 1$:
• $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$
• $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; \pm\sqrt{3}\}$
Như vậy tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là $\{-2; -\sqrt{3}; -1; 0; 1; \sqrt{3}\}$.
Suy ra $g(x)$ có tối đa 7 nghiệm. Lại có:

$$\begin{cases} g(x) \to -\infty \text{ khi } x \to -\infty \\ g(-2) = 3 > 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (-\infty; -2) \\ g(-\sqrt{3}) = -1 < 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (-2; -\sqrt{3}) \\ g(-1) = 19 > 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (-\sqrt{3}; -1) \\ g(0) = -1 < 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (-1; 0) \\ g(1) = 3 > 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (0; 1) \\ g(\sqrt{3}) = -1 < 0 \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (1; \sqrt{3}) \\ g(x) \to +\infty \text{ khi } x \to +\infty \Rightarrow g(x) \text{ có 1 nghiệm trong } (\sqrt{3}; +\infty) \end{cases}$$

Như vậy $g(x) = f(f(x))$ có 7 nghiệm thực. □

CHƯƠNG II: PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

Lý thuyết

Đối với bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm miền D ta dựa vào tính chất: phương trình có nghiệm khi và chỉ khi hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(m)$ cắt nhau. Do đó để bài toán này ta tiến hành theo các bước sau:
Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.
Bước 2: Dựa vào bảng biến thiên ta xác định m để đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.
Chú ý : Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và $m = \underset{D}{Min}\, f(x)$, $M = \underset{D}{Max}\, f(x)$ thì phương trình: $k = f(x)$ có nghiệm $m \leqslant k \leqslant M$
Sau đây là một số bài tập ví dụ:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = m$ có nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ với $x \in \mathbb{R}$ có
$f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$
Ta sẽ tìm nghiệm của $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1} = (2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$$
$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] = (x-\frac{1}{2})^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = 0$$

Thử lại ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của $f'(x)$. Suy ra $f'(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, mà $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-1; 1)$ $\square$

Bài 2: Tìm m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 0$
Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$ với $x \geqslant 0$ ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$
Lại có: $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < \dfrac{x}{2\sqrt[4]{x^6}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0\ \forall x > 0.$
Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$
Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0; 1]$ $\square$.
⊛ Nhận xét: Đôi khi ta phải tìm cách cô lập m để đưa phương trình về dạng trên.

Bài 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$ (*)

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ x^4 - 13x + m = (1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant x \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x = 1 - m \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$ với $x \leqslant 1$
Ta có: $f'(x) = 12x^2 - 12x - 9$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.
Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geqslant -\dfrac{3}{2}$. $\square$

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$

Giải

ĐKXĐ: $x \in [0; 4]$.
Khi đó phương trình tương đương với

$$(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = m$$

Xét hàm số $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$.
Ta có: $f'(x) = \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}\right) > 0\ \forall x \in [0; 4]$
Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; 4]$.
Suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2) \leqslant m \leqslant 12$ $\square$.

Bài 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $(*) \begin{cases} 2^{x^2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-5x} \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant -4+5x \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;4] \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}$$

Xét $f(x) = \dfrac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}$ với $x \in [1;4]$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{6x^2\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x}(3x^2+16)}{x^3} = \frac{3\sqrt{x}(x^2-16)}{2x^3} \leqslant 0 \forall x \in [1;4]$$

Như vậy $m = f(x)$ nghịch biến trên $[1;4]$, do đó $f(4) \leqslant m \leqslant f(1) \Rightarrow 8 \leqslant m \leqslant 19$
Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [8;19]$ □
⊛ Nhận xét: Khi gặp hệ phương trình trong đó một phương trình của hệ không chứa tham số thì ta sẽ đi giải quyết phương trình này trước. Từ phương trình này ta sẽ tìm được tập nghiệm (đối với hệ một ẩn) hoặc sẽ rút được ẩn này qua ẩn kia. Khi đó nghiệm của hệ phụ thuộc vào nghiệm của phương trình thứ hai với kết quả ta tìm được ở trên.

Bài 6: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2007x \leqslant 2007 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 = 0 \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2007x \leqslant 2007 \Rightarrow 7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x+2} - 1) \leqslant 2007(1-x) \ (*)$$

⁎ Nếu $x > 1 \Rightarrow 7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x-2} - 1) > 0 > 2007(1-x)$.Suy ra (*) vô nghiệm.
⁎ Nếu $x \leqslant 1 \Rightarrow 7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x-2} - 1) \leqslant 0 \leqslant 2007(1-x)$. Suy ra (*) đúng .
Suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m + 3 = 0$ có nghiệm với $x \in [-1;1]$, hay phương trình $m = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ có nghiệm với $x \in [-1;1]$.
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ với $x \in [-1;1]$, có

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{3}$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leqslant 2-\sqrt{3}$.

Bài 7: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $(*) \begin{cases} x - y + m = 0 \\ y + \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $xy \geqslant 0$. Từ hệ ta cũng có $y \neq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + m = 0 \\ \sqrt{xy} = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + m = 0 \\ x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} \\ y \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow m = y - \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} = \dfrac{4y - 4}{y} (y \leqslant 2)$$

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{4y - 4}{y} (y \leqslant 2)$ ta có $f'(y) = \dfrac{4}{y^2} > 0\ \forall y \neq 0$, suy ra hàm số $f(y)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 2]$.

Mặt khác, $\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = 4$, $\lim\limits_{y \to 0^+} f(y) = -\infty$; $\lim\limits_{y \to 0^-} f(y) = +\infty$

Suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; 2] \cup (4; +\infty)$ □

Bài 8: Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\sqrt{x^4 - 4x^3 + 16x + m} + \sqrt[4]{x^4 - 4x^3 + 16x + m} = 6\ (*)$$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 4x^3 + 16x + m} = 2 \Leftrightarrow m = -x^4 + 4x^3 - 16x + 16$$

Xét hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 16x + 16$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 16; f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m < 27$.

Bài 9: Tìm m để phương trình $m\sqrt{x^2 + 2} = x + m$ $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Từ (*) ta có: $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - 1}$

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2} - 1}$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2}(\sqrt{x^2 + 2} - 1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ □

Bài 10: Tìm m để phương trình: $mx^2 + 1 = \cos x$ $(*)$ có đúng một nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

Ta thấy để (*) có nghiệm thì $m \leqslant 0$. Khi đó

$$mx^2 + 1 = \cos x \Rightarrow m = \frac{\cos x - 1}{x^2} \Rightarrow -2m = \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ với $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$
Ta có

$$f'(t) = \frac{2t^2 \sin t \cos t - 2t\sin^2 t}{t^4} = \frac{2\sin t(t\cos t - \sin t)}{t^3} = \frac{\sin 2t(t - \tan t)}{t^3} < 0 \ \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{4})$.
Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có đúng một nghiệm trên $(0; \frac{\pi}{4})$ khi và chỉ khi $\dfrac{8}{\pi^2} < -2m < 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < m < -\dfrac{4}{\pi^2}$ □

Bài 11: Tìm m để hệ phương trình có ba cặp nghiệm phân biệt:

$$(*) \begin{cases} 3(x+1)^2 + y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $xy \geqslant 0$
Ta có

$$(*) \begin{cases} 3(x+1)^2 + y = m \\ \sqrt{xy} = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+1)^2 + y = m \\ y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \\ y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow m = 3(x+1)^2 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow m - 3 = 3x^2 + 6x + \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

Xét hàm số: $f(x) = 3x^2 + 6x + \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \quad (x \leqslant 1)$ ta có

$$f'(x) = \frac{6x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt khi
$m \in [-4; \frac{-15}{4}] \cup [\frac{20}{3}; 12]$ □

⊛ Nhận xét: Khi đặt ẩn phụ ta phải tìm miền xác định của ẩn phụ và giải quyết bài toán ẩn phụ trên miền xác định vừa tìm. Cụ thể:
* Khi đặt $t = u(x) (x \in D)$, ta tìm được $t \in D_1$ và phương trình $f(x, m) = 0$ (1) trở thành $g(t, m) = 0$ (2). Khi đó (1) có nghiệm $x \in D \Rightarrow$ (2) có nghiệm $t \in D_1$.
* Để tìm miền xác định của t ta có thể sử dụng các phương trình tìm miền giá trị (vì miền xác định của t chính là miền giá trị của hàm $u(x)$).
* Nếu bài toán yêu cầu xác định số nghiệm thì ta phải tìm sự tương ứng giữa x và t, tức là mỗi giá trị $t \in D_1$ thì phương trình $t = u(x)$ có bao nhiêu nghiệm $x \in D$.

Bài 12: Tìm m để phương trình $m(\sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x^2-4}) - \sqrt{x+2} = 2\sqrt[4]{x^2-4}$ có nghiệm

Giải

ĐKXĐ; $x \geqslant 2$
Ta thấy $x = 2$ không là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho $\sqrt[4]{x^2-4}$:

$$m\left(\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}+2\right)-\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}=2\ (*)$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}(t>1)$. Khi đó (*) trở thành: $m\left(\frac{1}{t}+2\right)-t=2 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+2t}{2t+1}$.
Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t}{2t+1}(t>1)$ ta có $f'(t)=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}>0\ \forall t>1$.
Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.
Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m>1$ □
⊛ Nhận xét: Trong các bài toán trên sau khi đặt ẩn phụ ta thường gặp khó khăn khi xác định miền xác định của t . Để tìm được điều kiện của ẩn phụ t, chúng ta có thể dùng công cụ hàm số, bất đẳng thức, lượng giác hóa...

Bài 13: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$

Giải

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Do $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow 1\leqslant t\leqslant 2$
Phương trình đã cho trở thành: $t^2+t=2m+2$
Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $1\leqslant t\leqslant 2$, ta thấy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[1;2]$
Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\leqslant 2m+2\leqslant 6 \Leftrightarrow 0\leqslant m\leqslant 2$ □

Bài 14: Xác định m để hệ sau có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4\\ \log_2(x^2-2x+5)-m\log_{(x^2-2x+5)}2=5\end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x>1$. Từ bất phương trình thứ nhất của hệ ta có: $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+1}{x-1}>\log_{\sqrt{3}}2 \Rightarrow x\in(1;3)$.
Đặt $t=\log_2(x^2-2x+5)(t\in(2;3))$và phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$t+\frac{m}{t}=5 \Rightarrow t^2-5t=-m$$

Từ cách đặt t ta có: Với mỗi giá trị $t\in(2;3)$ thì cho ta đúng một giá trị $x\in(1;3)$. Suy ra hệ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2-5t=-m$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(2;3)$.
Xét hàm số $f(t)=t^2-5t$ với $t\in(2;3)$. Ta có $f'(t)=2t-5; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có, hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(6;\frac{25}{4})$ □

Bài 15:(Đề thi ĐH khối B - 2004) Tìm m để phương trình có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\ (*)$$

Giải

Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Trước tiên, ta nhận thấy rằng: $(1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4$ và $1-x^2+1+x^2=2$ nên ta có phép đặt ẩn phụ như sau:
Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$
Phương trình đã cho trở thành:

$$m(t+2) = -t^2+t+2 \Leftrightarrow \frac{-t^2+t+2}{t+2} = m \ (1)$$

Do $\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \geqslant 0$
Mặt khác: $t^2 = 2-2\sqrt{1-x^4} \leqslant 2 \Rightarrow t \leqslant \sqrt{2}$
Ta xét hàm số: $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$, ta có:$f'(t) = \dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2} \leqslant 0$
Vậy hàm $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\sqrt{2}\right]$. Mà hàm số liên tục trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ nên phương trình đã cho có nghiêm x khi phương trình (1) có nghiệm $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.
Điều này tương đương với:

$$\min f(t) \leqslant m \leqslant \max f(t) \ \ \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\right) \leqslant m \leqslant f(0)$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $\sqrt{2}-1 \leqslant m \leqslant 1$ □.

Bài 16: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}\right)$$

Giải

Cũng giống như những bài toán trước, ở bài này ta nghĩ ngay là phải đưa bài toán về dạng $f(x) = m$ rồi sử dụng tương giao giữa 2 đồ thị và suy ra điều kiện m.
Ta giải bài toán như sau:
Điều kiện: $0 \leqslant x \leqslant 4$
Phương trình đã cho tương đương với: $\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}} = m$
Đặt $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}} \ \forall x \in [0;4]$
Tuy nhiên, nếu đến đây ta khảo sát hàm số này thì có vẻ khá phức tạp và dài dòng. Vì vậy ta sẽ giải quyết theo một hướng khác. Để ý rằng, ta có tính chất sau:
Với hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Nếu $y = f(x)$ đồng biến và $y = g(x)$ nghịch biến thì $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ đồng biến.
Ta vận dụng tính chất trên như sau:
Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$ ta có:
$g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0$ nên hàm $g(x)$ là đồng biến.
Xét hàm số $h(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}$ ta có:
$h'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} < 0$ nên hàm $h(x)$là nghịch biến

Vậy, theo tính chất trên ta có hàm $y = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ đồng biến $\forall x \in [0;4]$.
Do đó phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi
$f(0) \leqslant m \leqslant f(4) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{15} - \sqrt{12}\right) \leqslant m \leqslant 12$ □.

Bài 17: Giải và biện luận phương trình sau theo m:

$$\sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x - 1| - m \ (1)$$

Giải

Xét $x \geqslant 1$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + m^2} = x - 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 - m \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + m^2 = (x - 1 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 + m \\ 2mx = 2m + 1 \end{cases}$$

⋇ Nếu $m = 0$: hệ trên vô nghiệm
⋇ Nếu $m \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{2m+1}{2m}$
Ta có $x \geqslant 1 + m \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{2m} \geqslant 1 + m \Leftrightarrow \dfrac{-2m^2+1}{2m} \geqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vee 0 < m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Lại có $x \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{2m+1}{2m} \geqslant 1 \Leftrightarrow m > 0$
Kết hợp điều kiện trên ta có $0 < m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Xét $x < 1$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + m^2} = 1 - x - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x - m \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + m^2 = (1 - x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx = 2m - 1 \\ x \leqslant 1 - m \end{cases}$$

Kết luận:
⋇ Nếu $m = 0$: hệ vô nghiệm
⋇ Nếu $0 < m < \dfrac{1}{3} \vee m > 3$: phương trình có 2 nghiệm:$x = \dfrac{1 + m \pm \sqrt{-3m^2 + 10m - 3}}{1 - m}$
⋇ Nếu $m = 3$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$
⋇ Nếu $m = \dfrac{1}{3}$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.□

Bài 18: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + \left(x^2 + x + 1\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 + m\left(x^2 - x + 1\right)^2$$

Giải

Để ý rằng: $\left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$
Do đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x^2 + x + 1\right)^2 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) + m\left(x^2 - x + 1\right)^2$$

Do $x^2 - x + 1 > 0, \forall x$ nên chia hai vế của phương trình cho $x^2 - x + 1$ ta được:

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right)^2 - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = m$$

Đặt $t = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}, \dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant 3$
Phương trình trên trở thành: $t^2 - t = m$
Đây là một phương trình bậc hai đơn giản nên việc khảo sát xin dành cho bạn đọc.
Điều lưu ý ở đây là điều kiện của t. Thực chất ở đây ta đã tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ (có thể dùng phương pháp miền giá trị).

Bài 19: Tìm m để hệ sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \dfrac{1}{x^3} + y^3 + \dfrac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

Giải

Cách 1:
Nhìn vào hệ này, ta thấy ngay được hướng đi là phải đặt ẩn phụ vì giữa các đại lượng $x + \dfrac{1}{x}$ và $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ dường như có mối liên hệ với nhau. Với ý tưởng đó, ta có phép đặt như sau:
Đặt $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y + \dfrac{1}{y} \end{cases}, (|a| \geqslant 2, |b| \geqslant 2).$

Ta có $\begin{cases} x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = a^3 - 3a \\ y^3 + \dfrac{1}{y^3} = \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^3 - 3\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = b^3 - 3b \end{cases}$

Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 + b^3 - 3(a+b) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 8 - m \end{cases}$$

Dễ thấy a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 8 - m = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5x + 8 = m$ (1) Xét hàm số $f(X) = X^2 - 5X + 8$, $|X| \geqslant 2$, ta có:
$f'(X) = 2X - 5 \Rightarrow f'(X) = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{5}{2}$
Từ đó, kẻ bảng biến thiên và chú ý rằng hệ đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $|X| \geqslant 2$. Ta tìm được: $\dfrac{7}{2} \leqslant m \leqslant 2 \vee m \geqslant 22$.

Cách 2:
Ta nhận thấy rằng ở phương trình thứ nhất không có chứa tham số nên ta sẽ xuất phát từ phương trình này. Khai triển phương trình này ra, ta được:

$$x^3 - y^3 + 4(x - y) = 9y + 8 - 3x^2 + 6y^2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x = y^3 + 6y^2 + 13y + 8$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (y+2)^3 + (y+2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, dễ thấy là hàm số này đồng biến nên

$$f(x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow x + 1 = y + 2 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Từ đây, thay $x = y + 1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{15 + 2y - y^2} = 2m + \sqrt{4 - y^2} \Leftrightarrow \sqrt{(5 - y)(y + 3)} - \sqrt{4 - y^2} = 2m$$

Đến đây ý tưởng đã rõ, ta chỉ cần chuyển về tương giao giữa hai đồ thị.

Bài 20: Tìm m để hệ sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x^3 + (y + 2)x^2 + 2xy = -2m - 3 \\ x^2 + 3x + y = m \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ở hệ này ta quan sát thấy bài toán còn chưa rõ đường lối nào vì cả hai phương trình trong hệ đều chứa đến tham số m. Vì vậy để đi đến hướng giải quyết tốt ta nên bắt đầu phân tích hai vế trái trong hai phương trình trong hệ. Cụ thể ta có:

$$x^3 + (y + 2)x^2 + 2xy = x^3 + yx^2 + 2x^2 + 2xy = x^2(x + y) + 2x(x + y) = (x + y)\left(x^2 + 2x\right)$$

Mặt khác:

$$x^2 + 3x + y = x^2 + 2x + x + y$$

Rõ ràng ở bước phân tích này ta đã tìm ra lối giải cho bài toán này đó chính là đặt ẩn phụ.
⊛ Lời giải:
Đặt: $\begin{cases} a = x^2 + 2x \geqslant -1 \\ b = x + y \end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = m \\ ab = -2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 = (a + 2)m \; (1) \\ b = m - a \end{cases}$$

Từ phương trình (1) trong hệ ta có: $\dfrac{a^2 - 3}{a + 2} = m$ (2)
Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $a \geqslant -1$.
Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$ với $x \geqslant -1$
Đến đây ta chỉ cần lập bảng biến thiên. Công việc tiếp theo xin dành cho bạn đọc.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm m để phương trình $\tan^2 x + \cot^2 x + m(\cot x + \tan x) = 3$ có nghiệm
Bài 2: Tìm m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{-x + 9} = \sqrt{9x - x^2 + m}$ có nghiệm
Bài 3: Tìm m để phương trình $\sqrt{3 + x} + \sqrt{-x + 6} - \sqrt{18 + 3x - x^2} = m$ có nghiệm
Bài 4: Tìm m để phương trình $x^3 - 4mx^2 + 8 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
Bài 5: Tìm m để phương trình $x^3 + 3x^2 + (3 - 2m)x + m + 1 = 0$ có đúng một nghiệm lớn hơn 1.
Bài 6: Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm thực phân biệt:
$4x^2 - 2mx + 1 = 3\sqrt{8x^3 + 2x}$

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE-ROLLE

Lý thuyết

★ **Định lý Rolle:** : Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;\ b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a;\ b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a;\ b)$ sao cho $f'(c) = 0$.
Từ đó ta có 3 hệ quả:
⁕ Hệ quả 1: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên (a; b) và $f(x)$ có n nghiệm (n là số nguyên dương lớn hơn 1) trên (a; b) thì $f'(x)$ có ít nhất n - 1 nghiệm trên (a; b).
⁕ Hệ quả 2: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên (a; b) và $f'(x)$ vô nghiệm trên (a; b) thì $f(x)$có nhiều nhất 1 nghiệm trên (a; b).
⁕ Hệ quả 3: Nếu $f(x)$có đạo hàm trên (a; b) và $f'(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên (a; b) thì $f(x)$ có nhiều nhất n + 1 nghiệm trên (a; b).
Các hệ quả trên vẫn đúng nếu các nghiệm là nghiệm bội (khi $f(x)$ là đa thức) và cho ta ý tưởng về việc chứng minh tồn tại nghiệm cũng như xác định số nghiệm của phương trình, và nếu như bằng một cách nào đó ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình thì nghĩa là khi đó phương trình đã được giải.

★ **Định lý Lagrange:** : Nếu $f(x)$là hàm liên tục trên đoạn $[a;\ b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a;\ b)$thì tồn tại $c \in (a;\ b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Sau đây là một số ứng dụng của hai định lý trên:

Bài tập ví dụ

★ **Dùng định lý Lagrange - Rolle để biện luận phương trình:**

Bài 1: Chứng minh rằng phương trình $a\ cosx + b\cos 2x + c\cos 3x = 0$ luôn có nghiệm với mọi a, b, c.

Giải

Xét $f(x) = a\sin x + \dfrac{b\sin 2x}{2} + \dfrac{c\sin 3x}{3}$
ta có $f'(x) = a\ cosx + b\cos 2x + c\cos 3x$
Mà $f(0) = f(\pi) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0;\pi) : f'(x_0) = 0$, suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 2: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất 4 nghiệm thuộc $[0;\pi]$: $a\sin x + 9b\ sin3x + 25c\sin 5x = 0$

Giải

Để chứng minh $f(x)$ có ít nhất n nghiệm ta chứng minh $F(x)$ có ít nhất $n+1$ nghiệm với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ (có thể phải áp dụng nhiều lần)
Xét hàm số $f(x) = -a\sin x - b\sin 3x - c\sin 5x$, ta có:

$$f'(x) = -a\cos x - 3b\cos 3x - 5c\cos 5x;\ \ f''(x) = a\sin x + 9b\sin 3x + 25c\sin 5x$$

Ta có $f(0) = f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4}) = f(\pi) = 0$
Suy ra $\exists x_1 \in (0; \frac{\pi}{4}), x_2 \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}), x_3 \in (\frac{3\pi}{4}; \pi) : f(0) = f'(x_1) =' f(x_2) = f'(x_3) = 0$
$\Rightarrow \exists x_4 \in (x_1; x_2), x_5 \in (x_2; x_3) | f''(x_4) = f''(x_5) = 0$
mà $f''(0) = f''(\pi) = 0$, suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 3: Chứng minh phương trình $x^5 - 5x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm thực.

Giải

Đặt $f(x) = x^5 - 5x + 1$ thì $f(-2) = -21 < 0, f(0) = 1 > 0, f(1) = -3 < 0, f(2) = 23 > 0$
nên từ đây suy ra phương trình đã cho có ba nghiệm thực
Giả sử có nghiệm thứ tư của phương trình. Áp dụng định lý Rolle ta có:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 5 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm thực nên suy ra mâu thuẫn.
Vậy ta có điều phải chứng minh □.

Bài 4: Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x) = aP(x) + bP'(x)$ trong đó a, b là các số thực, a $\neq$0. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ vô nghiệm thì $P(x)$ vô nghiệm.

Giải

Ta có $\deg P(x) = \deg Q(x)$
Vì $Q(x)$ vô nghiệm nên $\deg Q(x)$ chẵn. Giả sử $P(x)$ có nghiệm, vì $\deg P(x)$ chẵn nên $P(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.
⁎ Khi $P(x)$ có nghiệm kép $x = x_0$ ta có x_0 cũng là một nghiệm của $P'(x)$ suy ra $Q(x)$ có nghiệm.
⁎ Khi $P(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$:
• Nếu $b = 0$ thì hiển nhiên $Q(x)$ có nghiệm.
• Nếu b $\neq$0 : Xét $f(x) = e^{\frac{a}{b}x}P(x)$ thì $f(x)$có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và

$$f'(x) = \frac{a}{b}e^{\frac{a}{b}x}P(x) + e^{\frac{a}{b}x}P'(x) = \frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}x}[aP(x) + bP'(x)] = \frac{1}{b}e^{\frac{a}{b}x}Q(x)$$

Vì $f(x)$ có hai nghiệm suy ra $f'(x)$ có ít nhất 1 nghiệm hay $Q(x)$ có nghiệm.
Tất cả trường hợp đều mâu thuẫn với giả thiết $Q(x)$ vô nghiệm. Vậy khi $Q(x)$ vô nghiệm thì $P(x)$ vô nghiệm □

Bài 5: Giả sử phương trình sau có n nghiệm phân biệt:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, \ (a_0 \neq 0)$$

Chứng minh $(n-1)a_1^2 > 2na_0a_2$

Giải

Đặt $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = f(x)$
Nhận xét f khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ nên suy ra
$f'(x)$ có $n-1$ nghiệm phân biệt.
$f''(x)$ có $n-2$ nghiệm phân biệt.
. . . ..
$f^{[n-2]}(x) = \frac{n!}{2}a_0x^2 + (n-1)!a_1x + (n-2)!a_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận thấy $f^{[n-2]}(x)$ có $\Delta > 0$ nên $((n-1)!a_1)^2 - 2n!a_0(n-2)!a_2 > 0$
Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 6: (VMO 2002) Xét phương trình $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2x-1} = \frac{1}{2}$, với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình nêu trên có một nghiệm duy nhất lớn hơn 1; kí hiệu nghiệm đó là x_n

Giải

Xét $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2x-1} - \frac{1}{2}$, ta có: $f_n(x)$ liên tục và nghịch biến trên $(1; +\infty)$

Mà $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f_n(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất lớn hơn 1. □

★ Dùng định lý Lagrange -Rolle để giải phương trình:

Bài 7: Giải phương trình $3^x + 5^x = 2.4^x$ $(*)$

Giải

Nhận xét: $x = 0; x = 1$ là nghiệm của phương trình (*).
Gọi x_0 là nghiệm khác của phương trình đã cho. Ta được:

$$3^{x_0} + 5^{x_0} = 2.4^{x_0} \Leftrightarrow 5^{x_0} - 4^{x_0} = 4^{x_0} - 3^{x_0} \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^{x_0} - t^{x_0}$, ta có $(*) \Leftrightarrow f(4) = f(3)$
Vì $f(t)$ liên tục trên $[3; 4]$ và có đạo hàm trong khoảng $(3; 4)$, do đó theo định lí Rolle tồn tại c $\in$ (3; 4) sao cho

$$f'(c) = 0 \Rightarrow x_0[(c+1)^{x_0-1} - c^{x_0-1}]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình (*) có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$. □

Bài 8: Giải phương trình $5^x - 3^x = 2x$ $(*)$

Giải

Nhận xét: $x = 0; x = 1$ là nghiệm của phương trình (2). Gọi x_0 là nghiệm khác của phương trình đã cho, ta có:

$$5^{x_0} - 5x_0 = 3^{\mathrm{x}_0} - 3\mathrm{x}_0 \ (2a)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^{x_0} - tx_0$, khi đó: (2a) $\Leftrightarrow f(5) = f(3)$
Vì $f(t)$ liên tục trên $[3; 5]$ và có đạo hàm trên $(3; 5)$, do đó theo định lí Lagrange luôn tồn tại c $\in$ (3; 5) sao cho

$$f'(c) = 0 \Rightarrow x_0(c^{x_0-1} - 1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình (*) có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$ □

Bài 9: Giải phương trình: $3^x + 2.4^x = 19x + 3$ $(*)$

Giải

Ta có
$$(*) \Leftrightarrow 3^x + 2.4^x - 19x - 3 = 0$$

Xét hàm số: $y = f(x) = 3^x + 2.4^x - 19x - 3$ ta có: $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2.4^x \ln 4 - 19$ ta có $f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 2.4^x (\ln 4)^2 > 0, \forall x \in R$ hay $f''(x)$ vô nghiệm, suy ra $f'(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm, suy ra $f(x)$ có nhiều nhất 2 nghiệm.
Mà $f(0) = f(2) = 0$ do đó (*) có đúng hai nghiêm $x = 0, x = 2$ □

Bài 10: Giải phương trình: $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3.4 \cos x$ $(*)$

Giải

Đặt $t = \cos x,\ (t \in [-1; 1])$
Ta có: $(*) \Leftrightarrow (1 + t)(2 + 4^t) = 3.4^t \Leftrightarrow (1 + t)(2 + 4^t) - 3.4^t = 0$
Xét hàm số: $f(t) = (1 + t)(2 + 4^t) - 3.4^t$ ta có:
$f'(t) = 2 + 4^t + (t - 2)4^t \ln 4,\ f''(t) = 2.4^t \ln 4 + (t - 2)4^t \ln^2 4$
Lại có: $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 + \dfrac{2}{\ln 4}$, suy ra $f''(t)$ có nghiệm duy nhất.
Suy ra $f'(t)$ có nhiều nhất hai nghiệm, nghĩa là $f(t)$ có nhiều nhất ba nghiệm.
Mặt khác dễ thấy$f(0) = f(\dfrac{1}{2}) = f(1) = 0$, do đó $f(t)$ có ba nghiệm $t = 0, \dfrac{1}{2}, 1$.
Kết luận: Nghiệm của phương trình (*) là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ □

Bài 11: Giải phương trình $3^{\cos x} - 2^{\cos x} = 2^{\cos x} - 2\cos x$ $(*)$

Giải

Xét hàm $f(t) = t^{\cos\alpha} - t\cos\alpha, f'(t) = \cos\alpha(t^{\cos\alpha - 1} - 1)$
Ta nhận thấy $f(3) = f(2)$ và $f(x)$ khả vi trên [2;3] nên áp dụng định lý Lagrange ta có:

$$\exists c \in [2; 3] : f'(c) = \frac{f(3) - f(2)}{1} \Leftrightarrow \cos\alpha(c^{\cos\alpha - 1} - 1) = 0$$

Từ đó ta suy ra nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ □

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

Lý thuyết

★ **Bài toán:**
Cho hệ phương trình (hoăc hệ bất phương trình) chứa tham số có dạng:

$$(I)\begin{cases} f(x,m)=0 \\ x\in D_x \\ m\in D_m \end{cases} \quad \text{hoặc } (II)\begin{cases} f(x,m)\geqslant 0 \\ x\in D_x \\ m\in D_m \end{cases}$$

Trong đó x là biến số, m là tham số, D_x, D_m là miền xác định của x và m.
Yêu cầu đăt ra: ta phải tìm giá trị của tham số m để hệ (I) họăc (II) thỏa mãn một tính chất nào đó.
★ **Phương pháp giải:**

▶ **Bước 1 (điều kiện cần):** Giả sử hệ thỏa mãn tính chất P nào đó mà đầu bài đòi hỏi. Khi đó, dựa vào đặc thù của tính chất P và dạng của phương trình ta sẽ tìm được một ràng buộc nào đó đối với tham số m và ràng buộc ấy chính là điều kiện cần để có tính chất P. Điều đó có nghĩa là: nếu với m_0 không thỏa mãn ràng buộc trên thì chắc chắn ứng với m_0, hệ không có tính chất P.

▶ **Bước 2 (điều kiện đủ):** Ta tìm xem trong các giá trị của m vừa tìm được, giá trị nào làm cho hệ thỏa mãn tính chất P. Ở bước này nói chung ta cũng chỉ cần giải những hệ cụ thể không còn tham số. Sau khi kiểm tra, ta sẽ loại đi những giá trị không phù hợp và những giá trị còn lại chính là đáp số của bài toán.

Như vậy, ý tưởng của phương pháp này khá rõ ràng và đơn giản. Trong rất nhiều bài toán về biện luận thì phương pháp này lại thể hiện ưu thế rõ rệt. Tuy nhiên, thành công của phương pháp còn nằm ở chỗ ta phải làm thế nào để phát hiện điiều kiện cần một cách hợp lí và chọn điều kiện đủ một cát đúng đắn.

Bài tập ví dụ

★ **Sử dụng tính đối xứng của các biểu thức có mặt trong bài toán**

Bài 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m \ (1)$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử (1) có nghiệm duy nhất $x=\alpha$
Dễ thấy nếu (1) có nghiệm $x=\alpha$ thì (1) cũng có nghiệm $x=1-\alpha$. Vì nghiệm là duy nhất

nên $\alpha = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$
Thay $\alpha = \dfrac{1}{2}$ vào (1) ta tìm được $m = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$.
⊛ Điều kiện đủ:
Giả sử $m = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$, khi đó (1) có dạng sau:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8} \ (2)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{2} \text{ và } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leqslant \sqrt[4]{8}$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Vậy để (1) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần và đủ là $m = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$ □

Bài 2: Tìm a và b để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b} \ (1)$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0$, khi đó dễ thấy $x = -x_0$ cũng là nghiệm của (1). Do đó từ giả thiết ta suy ra $x_0 = 0$. Thay $x_0 = 0$ vào (1) ta được :

$$\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{b} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

⊛ Điều kiện đủ:
⁎ Khi $b = 0$, (1) có dạng:

$$\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{a^2x^2} = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 = 0$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$
⁎ Khi $b = 1$, (1) có dạng:

$$\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{(ax-1)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - 1} = 1 \ (*)$$

Đặt $u = \sqrt[3]{ax+1}; v = \sqrt[3]{ax-1}$, ta thấy:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 1 = 1 \\ ax - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow ax = 0$$

Vậy (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$
Tóm lại, để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần và đủ là $\left[\begin{array}{l} a \neq 0; b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$ □

Bài 3: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3m}} \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} - 4 = m - \sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3m}} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $-7 \leqslant x, y \leqslant 11; \ \dfrac{74}{27} \leqslant m \leqslant \dfrac{10}{3}$
Trừ theo vế hai phương trình ta có:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{11-x} = \sqrt{y+7} - \sqrt{11-y}$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t+7} - \sqrt{11-t}$; $-7 \leqslant t \leqslant 11$ ta có:
$f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+7}} + \dfrac{1}{2\sqrt{11-t}} > 0$ Vậy hàm số đồng biến, suy ra: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
Thay vào một trong hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} - 4 = m - \sqrt{4 - 3\sqrt{10-3m}} \ (*)$$

⊛ Điều kiện cần:
Ta thấy là nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $4 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình. Nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Thay vào phương trình (*) ta được:

$$\sqrt{4 - 3\sqrt{10-m}} = m - 2 \ (**)$$

Giải phương trình (**) ta tìm được $m = 3$.
⊛ Điều kiện đủ:
Với $m = 3$, ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \\ \sqrt{7+y} + \sqrt{11-y} = 6 \end{cases}$
Vì $x = y$ nên ta chỉ việc giải phương trình $\sqrt{7+x} + \sqrt{11-x} = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm để hệ đã cho có nghiệm duy nhất. □

Bài 4: Tìm a,b để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho thì $(-x_0; -y_0; z_0)$ cũng là nghiệm. Do tính duy nhất nên $x_0 = -x_0;\ y_0 = -y_0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$ Thay trở lại vào hệ , ta có: $\begin{cases} z_0 = a \\ z_0 = b \\ z_0^2 = 4 \end{cases}$
Từ đây ta suy ra $a = b = 2$ hoặc $a = b = -2$
⊛ Điều kiện đủ:

Xét hai trường hợp sau:
⋇ Nếu $a = b = 2$: Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} xyz + z = 2 \ (1) \\ xyz^2 + z = 2 \ (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ (3) \end{cases}$$

Lấy (1) − (2) ta được $xyz(1 - z) = 0$, từ (1) lại có $z \neq 0$ do đó $xy(1 - z) = 0$
* Nếu $x = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y = 0$
* Nếu $y = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 0$
* Nếu $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$.
Hệ trên có nghiệm $(x_1; y_1) \neq (0; 0)$.Vì vậy ngoài nghiệm $(0, 0, 2)$, hệ còn có nghiệm khác $(x_1; y_1; 1)$ do đó hệ không có nghiệm duy nhất. Trường hợp này không thỏa mãn.
⋇ Nếu $a = b = -2$:
Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} xyz = -2 \\ xyz^2 2 + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Tiến hành làm như trường hợp trên ta đi đến:
* Nếu $x = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow y = 0$
* Nếu $y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow x = 0$
* Nếu $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -3 \end{cases}$
Ta thấy từ hệ phương trình trên, ta suy ra $x^2 + y^2 < 2|xy|$ nên hệ vô nghiệm.
Vậy trong trường hợp này hệ có duy nhất nghiệm $(x; y; z) = (0, 0, -2)$
Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $a = b = -2$ □

★ Sử dụng điểm thuận lợi

Bài 5: Tìm a để phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\log_2\left(a^2x^2 - 5ax^2 + \sqrt{6 - a}\right) = \log_{2+x^2}\left(3 - \sqrt{a - 1}\right) \ (*)$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử (*) đúng với mọi x. Với $x = 0$ ta có $\log_2 \sqrt{6 - a} = \log_2 (3 - \sqrt{a - 1})$

Lại có: $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 6 \\ \sqrt{a - 1} < 3 \\ \sqrt{a - 1} + \sqrt{6 - a} = 3 \end{cases} \Rightarrow a \in \{2; 5\}$

⊛ Điều kiện đủ:

⋇ Nếu $a = 2$ thì $(*) \Leftrightarrow \log_2(2 - 12x^2) = \log_{2+x^2} 2$ $(**)$
Rõ ràng (**) không đúng với mọi x, vì để $\log_2(2 - 12x^2)$ có nghĩa thì phải có $12x^2 < 2$
⋇ Nếu $a = 5$ thì $(*) \Leftrightarrow \log_2 1 = \log_{2+x^2} 1$ (luôn đúng)
Vậy $a = 5$ là điều kiện cần và đủ để (*) đúng với mọi x □

Bài 6: Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử hệ có nghiệm với mọi b, thay $b = 0$ ta được

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Do đó điều kiện cần là $a = \pm 1$
⊛ Điều kiện đủ:
⋇ Nếu $a = 1$: ta có hệ $\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$
Khi $b > \dfrac{1}{2}$ hệ vô nghiệm. Vậy trường hợp này loại.
⋇ Nếu $a = -1$: ta có hệ $\begin{cases} 2^{bx} = 1 \\ -2x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$
Hệ trên luôn có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$
Vậy $a = -1$ là điểu kiện cần và đủ để hệ phương trình có nghiệm với mọi b □

Bài 7: Tìm a để hệ phương trình ẩn $(x; y)$ có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:
Giả sử hệ có nghiệm với mọi b, thay $b = 0$ ta có

$$(*) \begin{cases} (x^2+1)^a = 1 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0;\ x^2y = 1 \\ x^2 + 1 = a + x^2y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$$

⊛ Điều kiện đủ:
⋇ Nếu $a = 0$: ta có $\begin{cases} (b^2+1)^y = 1 \ (1) \\ bxy + x^2y = 1 \ (2) \end{cases}$

Nếu $b \neq 0 \Rightarrow b^2 + 1 \neq 1$ nên từ (1) có $y = 0$, nhưng không thoả (2). Vậy trường hợp này loại.

⁎ Nếu $a = 1$: ta có $\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1 \\ bxy + x^2y = 0 \end{cases}$

Hệ trên luôn có nghiệm $x = y = 0$.

Vậy $a = 1$ là điều kiện cần và đủ để hệ đã cho có nghiệm với mọi b □

Bài 8: Tìm điều kiện của a, b, c, d, e, f để hai phương trình ẩn $(x; y)$ sau là tương đương:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \ (2) \end{cases}$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:

Ta thấy $(x; y) = (0; \pm 1), (\pm 1; 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là nghiệm của (2). Do đó (1) cũng phải có các nghiệm trên.

Như vậy $\begin{cases} c + e + f = c - e + f = a + d + f = a - d + f = 0 \\ \dfrac{a + b + c + \sqrt{2}d + \sqrt{2}e + 2f}{2} = \dfrac{a + b + c - \sqrt{2}d - \sqrt{2}e + 2f}{2} = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được điều kiện cần của bài toán là $(*) \begin{cases} b = d = e = 0 \\ a = c = -f \neq 0 \end{cases}$

⊛ Điều kiện đủ:

Dễ thấy với (*) thì (2) trùng với (1).

Vậy (*) là điều kiện cần và đủ để (1) $\Leftrightarrow$ (2) □

Bài 9: Cho phương trình $x^3 + ax + b = 0 \quad (1)$
Tìm a, b để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ cách đều nhau.

Giải

⊛ Điều kiện cần:

Giả sử phương trình (1) có 3 nghiệm khác nhau x_1, x_2, x_3 thỏa giả thiết $\Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$

Theo định lý Viete với phương trình bậc 3 ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Thay $x_2 = 0$ vào (1) ta được $b = 0$

⊛ Điều kiện đủ:

Giả sử $b = 0$, khi đó (1) trở thành:

$$x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + a) = 0 \ (2)$$

Ta thấy (2) có 3 nghiệm phân biệt nếu $a < 0$. Khi đó các nghiệm của (2) là

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{-a} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{-a} \end{cases}$$

Các nghiệm trên cách đều nhau nên điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm thỏa mãn đề bài là $b = 0, a < 0$ □

Bài 10: Cho phương trình

$$x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$$

Tìm m để phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Giải

⊛ Điều kiện cần:

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3$

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$

Ta có: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, suy ra $f(x) > 0$ khi $x_1 < x < x_2$

Suy ra $f(-1) > 0$ hay $-m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$.

⊛ Điều kiện đủ:

Giả sử $m < -5$.

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $\varepsilon < -1$ mà $f(\varepsilon) < 0$

Lại có: $f(-1) = -m - 5 > 0$ và $f(x)$ liên tục nên ta có $\varepsilon < x_1 < -1$ sao cho $f(x_1) = 0$

Ta có: $f(0) = m - 3 < 0$ (do $m < -5$)

Vậy tồn tại $-1 < x_2 < 0$ sao cho $f(x_2) = 0$

Mặt khác, do $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên phải có $\varepsilon > 0$ sao cho $f(\varepsilon) > 0$.

Từ đó, tồn tại x_3 mà $0 < x_3 < \varepsilon$ sao cho $f(x_3) = 0$.

Như vậy, phương trình $f(x) = 0$ khi $m < -5$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3$. Vậy $m < -5$ chính là điều kiện cần và đủ thỏa mãn đế bài. □

Bài 11: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = x^2 + 2(2m-3)x + 5m^2 - 16m + 20$$

Giải

⊛ Điều kiện cần:

Giả sử phương trình đã cho có một nghiệm là x_0.

Đặt $f(x) = \dfrac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ và $g(x) = x^2 + 2(2m-3)x + 5m^2 - 16m + 20$

Khi đó dễ thấy rằng:

$$\max f(x) \geqslant f(x_0) = g(x_0) \geqslant \min g(x)$$

Do $\min g(x) = g(-(2m-3)) = m^2 - 4m + 11$

Gọi y_0 là giá trị tùy ý của $f(x)$, khi đó ta có:

$$y_0 = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow (20 - 3y_0)x^2 + 2(5 - y_0)x + 3 - y_0 = 0 \ (1)$$

Suy ra (1) có nghiệm khi: $\Delta' = -2{y_0}^2 + 19y_0 - 35 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \leqslant y_0 \leqslant 7$ Vậy $\max f(x) = 7$

Như vậy, từ điều kiện $\max f(x) \geqslant \min g(x)$ ta có:

$$7 \geqslant m^2 - 4m + 11 \Leftrightarrow (m-2)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow m = 2$$

⊛ Điều kiện đủ:
Giả sử $m = 2$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} = x^2+2x+8 \ (2)$$

Ta nhận thấy rằng $g(x) = x^2+2x+8 \begin{cases} = 7 \Leftrightarrow x = -1 \\ > 7 \Leftrightarrow x \neq -1 \end{cases}$

Mặt khác: $f(x) = \dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1} \leqslant 7$ với $\forall x$ và $f(-1) = 6,5$. Từ đây suy ra (2) vô nghiệm.
Vậy không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn giả thiết. □

Bài 12: Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ (1) có một nghiệm gấp đôi nghiệm của phương trình $x^2 - x + m = 0$ (2)

Giải

⊛ Điều kiện cần: Giả sử tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài, tức là phương trình (2) có nghiệm x_0, còn (1) có nghiệm $2x_0$. Vậy ta có

$$\begin{cases} 4x_0^2 - 6x0 + m = 0 \\ x_0^2 - x0 + m = 0 \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hai phương trình trên cho nhau ta sẽ tìm được $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \dfrac{5}{3}$
Thay hai giá trị x_0 vào một trong hai phương trình trên ta được $m = 0$ và $m = \dfrac{10}{9}$
Đây cũng chính là điều kiện cần của bài toán. ⊛ Điều kiện đủ:

Xét khi $m = 0$ và $m = \dfrac{10}{9}$ ta sẽ lần lượt giải các phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x + \dfrac{10}{9} = 0 \\ x^2 - x + \dfrac{10}{9} = 0 \end{cases}$

Dễ thấy nghiệm của 2 cặp phương trình này thoả giả thiết.
Vậy $m \in \left\{0; \dfrac{10}{9}\right\}$ là điều kiện cần và đủ thỏa mãn đề bài. □

Bài 13: Tìm a,b sao cho với mọi c phương trình sau có không quá hai nghiệm dương:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Giải

Để giải bài này, ta sẽ dùng phần bù. Nghĩa là ta tìm a, b sao cho tồn tại c để phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương.
⊛ Điều kiện cần:
Giả sử tồn tại c để phương trình $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương $x_1 < x_2 < x_3$.
Khi đó $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
Vậy hàm số $f(x)$ có cưc trị tại $\alpha, \beta > 0$ (với $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$)

$\Rightarrow$ Phương trình $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ (1) có hai nghiệm dương.
Như vậy

$$\begin{cases} \delta' = a^2 - 3b > 0 \\ P = \dfrac{b}{3} > 0 \\ S = \dfrac{2a}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 3b \\ b > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} b > 0 \\ a < -\sqrt{3}b \end{cases}$$

(*) là điều kiện cần của bài toán.
⊛ Điều kiện đủ:
Giả sử a, b thoả mãn (*) thì rõ ràng phương trình $3x^2 + 2ax + b = 0$ có 2 nghiệm dương $0 < \alpha < \beta$
Suy ra hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có cực đại tại $x = \alpha$ và cực tiểu tại $x = \beta$.
Do $\alpha > 0$ nên tìm được $x_1 \in (c; \alpha)$ sao cho $f(\beta) < f(x_1) < f(\alpha) \Rightarrow$ phương trình $f(x) = f(x_1)$ có ba nghiệm dương. Đặt $c = -f(x_1)$ thì phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương.
Vậy (*) là điều kiện cần và đủ để tồn tại c sao cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm dương.
Từ đó, ta suy ra: $b \leqslant 0$ hoặc $a \geqslant -\sqrt{3}b$ là điều kiện cần và đủ sao cho phương trình
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có không quá 2 nghiệm dương. □

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm m để hai phương trình sau là tương đương $x^2 + (m^2 - 5m + 6)\,x = 0$ và $x^2 + 2\,(m-3)\,x + m^2 - 7m + 12 = 0$
Bài 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$|x + m|^2 + |x + 1| = |m + 1|$
Bài 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)\,(6-x)} = m$
Bài 4: Tìm a để hệ sau có đúng một nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - a\left(\sqrt{x+y} - 1\right) = 1 \\ x + y = xy + 1 \end{cases}$
Bài 5: Tìm a để hệ sau có đúng một nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + |y| = a \\ \sqrt{y^2 + 5} + |x| = \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{3} - a \end{cases}$
Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy\left(x^2 + y^2\right) = m \end{cases}$
Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.
Bài 7: Tìm số thực m sao cho hệ: $\begin{cases} x^3 - my^3 = \dfrac{1}{2}(m+1)^2 \\ x^3 + mx^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thoả $x + y = 0$

PHƯƠNG PHÁP ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH VÀ HÌNH HỌC PHẲNG

Lý thuyết

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vector: $\overrightarrow{u}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{v}=(x_1,y_2)$ khi đó ta có:

$$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\leqslant|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\Leftrightarrow\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vector $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=k\geqslant 0.$

- Với hai vector $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ bất kì trong không gian thì

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\leqslant|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$$

- (Định lý cosin trong tam giác) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC và A là góc ở đỉnh A của tam giác khi đó:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

- Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và điểm M tùy ý trong mặt phẳng khi đó gọi T là điểm nhìn các cạnh BC, CA, AB dưới cùng một góc 120^0 thì với mọi điểm M trên mặt phẳng ta có:

$$MA+MB+MC\geqslant TA+TB+TC$$

T được gọi là điểm Torricelli của tam giác ABC.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp:

★ Khảo sát hệ phương trình chứa dạng tuyến tính và phân tuyến tính

Bài 1: Biện luận số nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2=r\\ax+by=c\end{cases}$ (r>0)

⊛ Phân tích: Hệ đã cho gồm phương trình đường tròn (C) và phương trình đường thẳng d. Như vậy ta cần khảo sát số giao điểm của (C) và d.

⋇ **Cách 1:** Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến d. Biện luận số giao điểm của đường thẳng và đường tròn bằng cách so sánh khoảng cách đó với bán kính của (C).

⋇ **Cách 2:** Tìm dải mặt phẳng P hoặc miền gốc $\widehat{Q}$ nhỏ nhất chứa (C). Biện luận vị trí của đường thẳng d đối với các miền phẳng đó. Nếu phát hiện đường thẳng đi qua một điểm trong đường tròn thì hệ phương trình luôn có nghiệm phân biệt.

Bài 2: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}(x-p)^2+(y-q)^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$ (r>0)

⊛ Phân tích: Đặt $u=x-p; v=y-p$ đưa về bài toán 1.

Bài 3: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}px^2+qy^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$ $(p,q,r>0)$

⊛ Phân tích: Hệ đã cho gồm phương trình đường elip (E) và phương trình đường thẳng d. Như vậy ta cần khảo sát số giao điểm của d và (E). Sử dụng phép co - dãn biến (E) thành đường tròn (C) và biến d thành d', ta đưa về khảo sát số điểm chung của d' và (C). Ta biết rằng số điểm chung không lớn hơn 2.
⊛ Phương pháp: Đặt $u=x; v=\sqrt{\frac{q}{p}}y$ hệ đã cho trở thành

$$(*)\begin{cases}u^2+v^2=\dfrac{r}{p}\\ au+\left(b\sqrt{\dfrac{p}{q}}v\right)=c\end{cases}$$

Từ đây làm tiếp như bài 1. Nếu phát hiện đường thẳng đi qua một điểm nằm trong (E) thì hệ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 4: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}p(x-k)^2+q(y-h)^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$ $(p,q,r>0)$

⊛ Phương pháp: Đặt $u=x-k; v=y-h$ đưa về bài toán 3.

Bài 5: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình với $p,q,r>0; k=\pm1$:

$$\begin{cases}px^2+kxy+qy^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$$

⊛ Phương pháp: Biến đổi phương trình đầu về dạng $mu^2+nv^2=r$ đưa về bài toán 4.

Bài 6: Khảo sát tính chất nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$ $(r>0)$

⊛ Phương pháp: Coi mỗi nghiệm của hệ là một điểm với toạ độ là cặp số đó. Biến đổi hệ phương trình và điều kiện của hệ thành ý nghĩa hình học. Điều kiện bài toán thường liên quan đến một số tính chất như tập hợp điểm thuộc phần chung của các nửa mặt phẳng hoặc miền tròn, miền elip hoặc khoảng cách giữa 2 điểm, tích vô hướng của 2 vectơ được lập ra từ các điểm đó, số đo góc tạo bởi 2 vectơ hoặc 2 đường thẳng.

Bài 7: Khảo sát tính chất nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}px^2+qy^2=r\\ ax+by=c\end{cases}$ $(p,q,r>0)$

⊛ Phương pháp: Đặt $u = \sqrt{p}x;\ v = \sqrt{q}y$ hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = r \\ a'u + b'v = c' \end{cases}$$

Trong đó $a' = \dfrac{a}{\sqrt{p}};\ b' = \dfrac{b}{\sqrt{q}}$. Bài toán đưa về bài 6.

★ Đưa phương trình vô tỉ một ẩn sang hệ phương trình hai ẩn

Bài 1: Khảo sát nghiệm của phương trình $\sqrt{a - bx^2} = kx + m$ với $a, b > 0$

⊛ Phương pháp: Đặt $y = \sqrt{\dfrac{a}{b} - x^2}$ khi đó ta có hệ

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a}{b} \\ kx - \sqrt{b}y = -m \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Bài toán đưa về khảo sát nghiệm của hệ $(*)$.

Bài 2: Khảo sát nghiệm của phương trình $\sqrt{a - b(x + c)^2} = kx + m$ với $a, b > 0$

⊛ Phương pháp: Đặt $z = x + c; y = \sqrt{a^2 + bz^2}$ và đưa về bài 1.

Bài 3: Khảo sát nghiệm của phương trình $a \sin t + b \cos t = c$ với $t \in [\alpha; \beta]$

⊛ Phương pháp: Đặt $x = \sin t;\ y = \cos t$ ta có hệ

$$(*) \begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài toán đưa về khảo sát nghiệm của hệ $(*)$ với x, y thoả điều kiện xác định.

Bài 4: Khảo sát số nghiệm của phương trình $p\sqrt{a + bx} + q\sqrt{c + dx} = m$ với $bd < 0;\ q = \pm 1$

⊛ Phương pháp: Coi $b > 0 \Rightarrow d < 0$. Đặt $y = \sqrt{\dfrac{a}{b} + x};\ z = \sqrt{\dfrac{-c}{d} - x}$ ta có hệ

$$(*) \begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} \\ p\sqrt{b}y + q\sqrt{-d}z = m \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Bài toán đưa về khảo sát số nghiệm của hệ $(*)$ gồm cung tròn $\widehat{AnB}$ nằm trong miền góc P xác định bởi các miền $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ và đường thẳng d.

Bài tập ví dụ

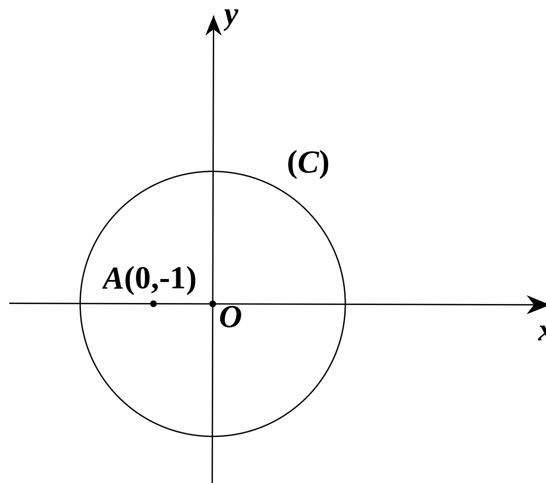
★ Các bài tập về hệ tuyến tính và phân tuyến tính

Bài 1: Biện luận số nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ x+my=m+1\end{cases}$$

Giải

Đặt $u=x-1;\ v=y-2$ ta có hê đã cho tương đương: $\begin{cases}u^2+v^2=5\\ u+mv=-m\end{cases}$



Hệ trên gồm phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2=5$ tâm là gốc tọa độ và bán kính là $\sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng $d: x+my+m=0$ phụ thuộc m. Hơn nữa, đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định $A(0;-1)$ nằm trong (C) nên d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.□

Bài 2: Tìm m để hệ có nghiệm $x>0;\ y>1$:

$$(*)\begin{cases}x^2+y^2=4\\ 2x-y=m\end{cases}$$

Giải

Điều kiện của bài toán xác định miền góc P với $x > 0; y > 1$. $(*)$ gồm phương trình đường tròn $(C):\ x^2 + y^2 = 4$ và phương trình đường thẳng $d:\ 2x - y = m$ phụ thuộc m. Phần chung của (C) và P là cung $\widehat{AnB}$ có các đầu mút $A(\sqrt{3}; 1)$ và $B(0; 2)$. Yêu cầu bài toán là tìm m để d và cung $\widehat{AnB}$ có ít nhất 1 điểm chung.
Phương trình đường thẳng d_1, d_2 đi qua A, B và cùng phương với d là $2x - y = 2\sqrt{3} - 1$ và $2x - y = -2$. Các đường thẳng đó cắt Ox tại $M_1(\sqrt{3} - \frac{1}{2}; 0)$ và $M_2(-1; 0)$. Các điểm đó nằm trong (C) nên giao điểm thứ hai của d_1, d_2 với (C) thuộc nửa mặt phẳng $P_1 = \{(x; y) : y < 0\}$. Vì vậy d_1, d_2 chỉ có một điểm chung với $\widehat{AnB}$ là A và B.

Gọi Q là dải mặt phẳng biên d_1, d_2, khi đó Q chứa $\widehat{AnB}$. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại $M(\frac{m}{2}; 0)$ khác M_1, M_2.
Từ đó suy ra $-2 < m < 2\sqrt{3} - 1$ là tập hợp các giá trị m thoả giả thiết. □

Bài 3: Tìm m để hệ có 2 nghiệm phân biệt thoả $x_1x_2 + y_1y_2 > 0$:

$$(*)\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m \end{cases}$$

Giải

Giả sử hệ có hai nghiệm phân biệt là (x_1, y_1) và (x_2, y_2), khi đó ta có: Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$,

thì do

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Nên suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) > 0 \Leftrightarrow \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$$

Hơn nữa do (x_1, y_1) và (x_2, y_2) đều là nghiệm của hệ nên các điểm A và B đều nằm trên đường tròn $(C):\ x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng $d:\ x + y = m$, như vậy AB là một dây của đường tròn (C), đồng thời AB cũng chính là đường thẳng d.
Như vậy để hệ có nghiệm thỏa điều kiện $x_1x_2 + y_1y_2 > 0$ thì AB phải cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt, hơn nữa phải thỏa mãn $\widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$

- AB cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow d_{O/d} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{2}} < 2$
- Gọi H là trung điểm của dây AB khi đó $OH \perp AB$. Ta có: $\widehat{AOB} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{AOH} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow AH < OH$. Vì $OH^2 + AH^2 = 4$ nên suy ra $\widehat{AOB} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow OH > \sqrt{2}$.

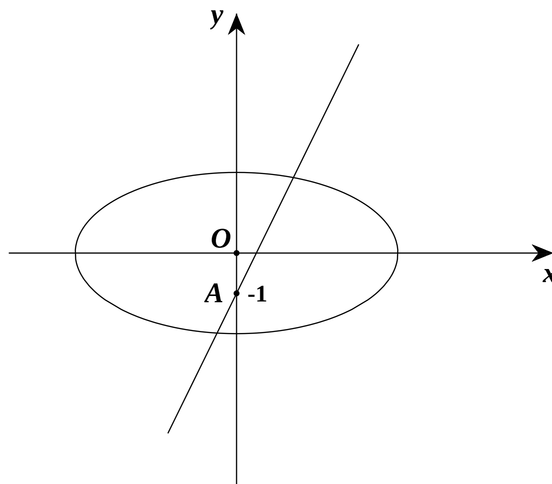
Như vậy hệ có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1x_2+y_1y_2 > 0 \Leftrightarrow 2 > \dfrac{|m|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > |m| > 2$ □

Bài 4: Tìm m để hệ có 2 nghiệm phân biệt thoả $(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 = 3$:

$$(*)\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ x - my = m \end{cases}$$

Giải

Hệ $(*)$ gồm phương trình elip $(E):\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: x - my = m$ phụ thuộc m.

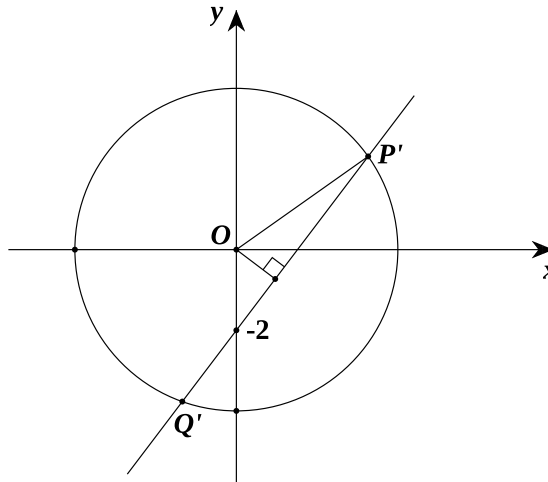


Ta có đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định A(0; -1) hơn nữa A nằm trong (E). Vậy d luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt, do đó hệ $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.
Gọi $B(x_1; y_1), D(x_2; y_2)$ và đặt $u = x; v = 2y$ (1). Công thức (1) xác định một phép dãn với hệ

số 2 bằng trục dãn Ox. Phép dãn đó biến các điểm B, D thành $B'(u_1; v_1), D'(u_2; v_2)$ và hệ $(*)$ trở thành:

$$(**)\begin{cases} u^2 + v^2 = 16 \\ 2u - mv = 2m \end{cases}$$

Toạ độ các điểm B', D' là nghiệm của $(**)$. Hệ gồm phương trình đường tròn (C) và phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép dãn đó.



Mặt khác

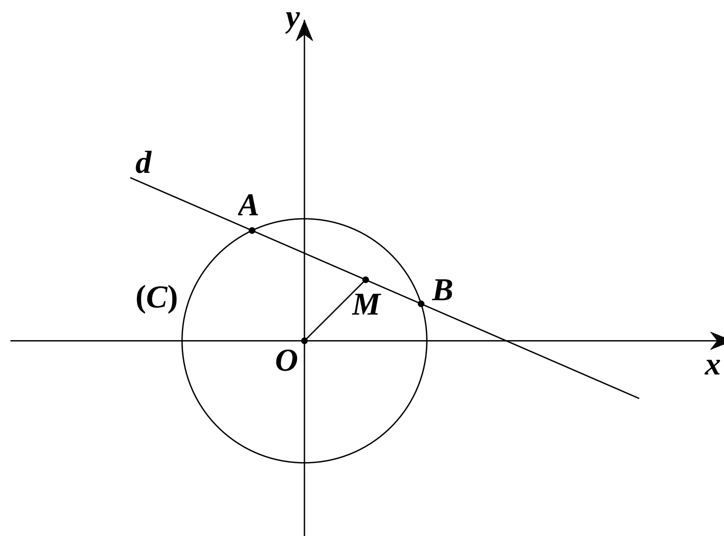
$$B'D'^2 = (u_1 u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 = 3$$

Nghĩa là d' cắt (C) tại 2 điểm B', D' sao cho $B'D' = \sqrt{3}$ hơn nữa (C) có tâm là gốc tọa độ nên $d^2_{O/d'} + \dfrac{B'D'^2}{4} = R^2 = 16$ Suy ra $d_{O/d'} = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$, do $d = \dfrac{|2m|}{\sqrt{4+m^2}}$ nên tìm được $m = \pm\sqrt{\dfrac{122}{3}}$ □

Bài 5: Tìm m để hệ có 2 nghiệm phân biệt và $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất:

$$(*)\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + my = m + 2 \end{cases}$$

Giải



Hệ (∗) gồm phương trình đường tròn $(C):\ x^2+y^2=4$ và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Gọi A,B là giao điểm của d và (C) thì ta cần tìm m để AB^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Do $M(1;1)\in d\ \forall m$ và M nằm trong (C) nên d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.
Ta có: AB Min $\Leftrightarrow d\perp OM$ (∗∗).
Gọi $\overrightarrow{u}=(-m;2)$ là vectơ chỉ phương của d thì

$$(**)\Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM}=0\Leftrightarrow 2-m=0\Leftrightarrow m=2$$

Do đó với $m=2$ thì hệ có hai nghiệm phân biệt thỏa $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}|x|+2|y|=4\\(x-2a)(y-a)=0\end{cases}$$

Giải

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases}|x|+2|y|=4 & (1)\\(x-2a)(ya)=0 & (2)\end{cases}$$

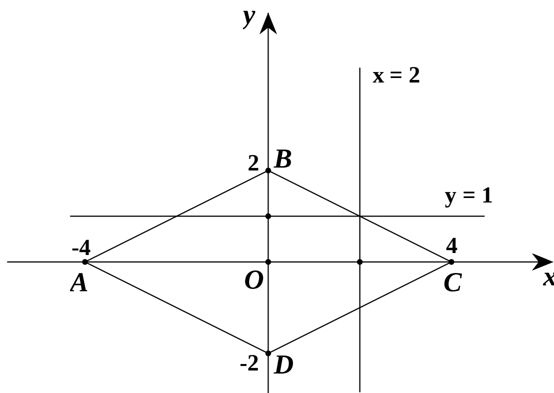
Ta thấy rằng các điểm thỏa mãn (1) là bốn cạnh của hình thoi $ABCD$ trong đó:

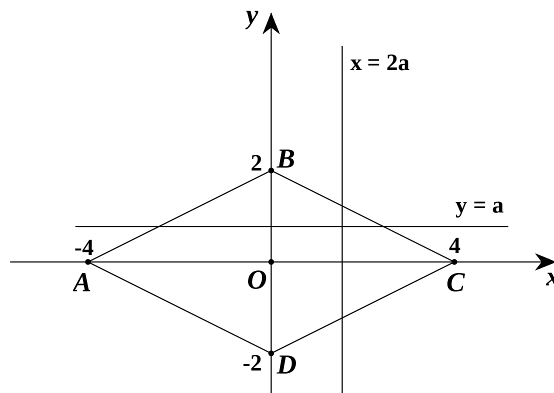
$$A((-4;0);B(0;2);C(4;0);D(0;-2)$$

Đồng thời, các điểm thỏa mãn (2) nằm trên hai đường thẳng $d_1:\ x=2a$ và $d_2:\ y=a$. Số nghiệm của hệ hai phương trình (1) và (2) chính là số giao điểm của bốn cạnh hình thoi với hai đường thẳng nói trên.
Trước tiên ta tìm xem khi nào 3 đường thẳng $x=2a;\ y=a$ và $|x|+2|y|=4$ đồng quy. Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm chung của ba đường thẳng này, khi đó ta có hệ sau:

$$\begin{cases}x_0=2a\\y_0=a\\|x_0|+2|y|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2a\\y_0=a\\4|a|=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=1\\x_0=2;\ y_0=1\\x_0=-2;y_0=-1\end{cases}$$





Dựa vào đồ thị trên ta có kết luận sau:

- Nếu $|a| > 2$: Hệ $(1),\ (2)$ vô nghiệm.
- Nếu $|a| = 2$: Hệ $(1),\ (2)$ có hai nghiệm.
- Nếu $|a| < 2$ và $|a| \neq 1$: Hệ $(1),\ (2)$ có 4 nghiệm.
- Nếu $|a| = 1$: Hệ $(1),\ (2)$ Có 3 nghiệm.

★ **Đưa phương trình vô tỉ về hệ phương trình**

Bài 7: Biện luận số nghiệm của phương trình

$$m\sqrt{9-x^2} - x + 5m = 0 \ (1)$$

Giải

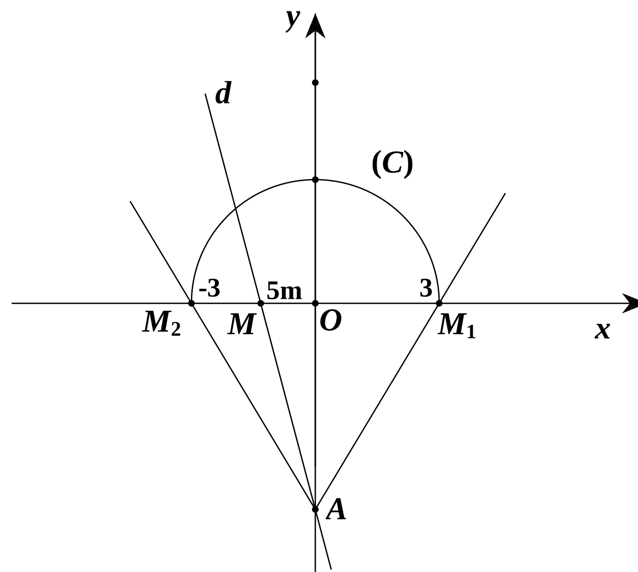
Đặt $y = \sqrt{5-x^2}$ ta có hệ

$$(*) \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x-my=5m \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Hệ $(*)$ gồm phương trình đường thẳng d phụ thuộc m và nửa đường tròn (C) xác định bởi hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ta có $A(0;-5) \in d\ \forall m$ do đó A nằm ngoài (C)



Các điểm $M_1(3;0), M_2(-3;0)$ là đầu mút của đường kính của (C). Các tia AM_1, AM_2 là biên của miền góc P. Đường thẳng d cắt M_1M_2 tại $M(5m;0)$ nên với m thoả $-3 \leqslant 5m \leqslant 3 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} \leqslant m \leqslant \dfrac{3}{5}$ thì d và nửa trên của (C) có duy nhất 1 giao điểm. Trường hợp này phương trình có 1 nghiệm.

Với các giá trị còn lại của m thì d và nửa trên của (C) không có giao điểm nên phương trình vô nghiệm. □

Bài 8: Biện luận theo m nghiệm của phương trình sau:

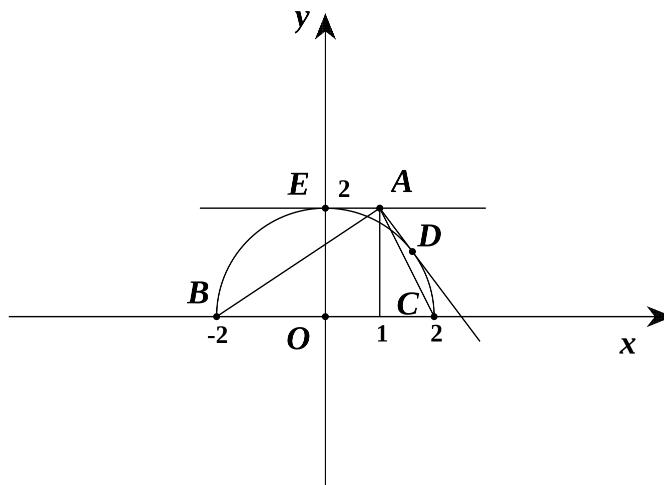
$$\sqrt{4-x^2} = mx + 2 - m \ (*)$$

Giải

Ta biết rằng số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của hai đường $y = mx + 2 - m$ và $y = \sqrt{4-x^2}$.

Hơn nữa vì $y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4, y \geqslant 0$ nên đồ thị của $y = \sqrt{4-x^2}$ là nửa đường tròn tâm là gốc tọa độ bán kính bằng hai và nằm phía trên trục hoành.

Còn $y = mx + 2 - m$ là một họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $A(1;2)$. Ta nhận thấy có hai tiếp tuyến với đường $(C) : y = \sqrt{4-x^2}$, một là đường thẳng $y = 3$ song song với trục hoành, và tiếp tuyến AD.



Gọi $B(-2,0)$ và $C(2,0)$ là hai đầu mút của đường kính BOC, giả sử m_1, m_2, m_3, m_4 tương ứng là hệ số góc của các đường thẳng AC, AD, AB, AE thì ta có các điều sau:

- $m_1 = -\tan\widehat{ACO} = -2$.
- $m_2 = -\tan\widehat{DCO} = -\tan\widehat{EAD} = -\tan\left(2\widehat{OAE}\right) = -\dfrac{4}{3}$.
- $m_3 = \tan\widehat{ABO} = \dfrac{2}{3}$.
- $m_4 = 0$.

Từ đó suy ra:

1. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 0 < m \leqslant \dfrac{2}{3} \\ -2 \leqslant m \leqslant -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

2. Phương trình $(*)$ có một nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} m > \dfrac{2}{3} \\ m < -2 \\ m = 0 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

3. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < m < 0$ □

Bài 9: Biện luận số nghiệm của phương trình sau theo a:

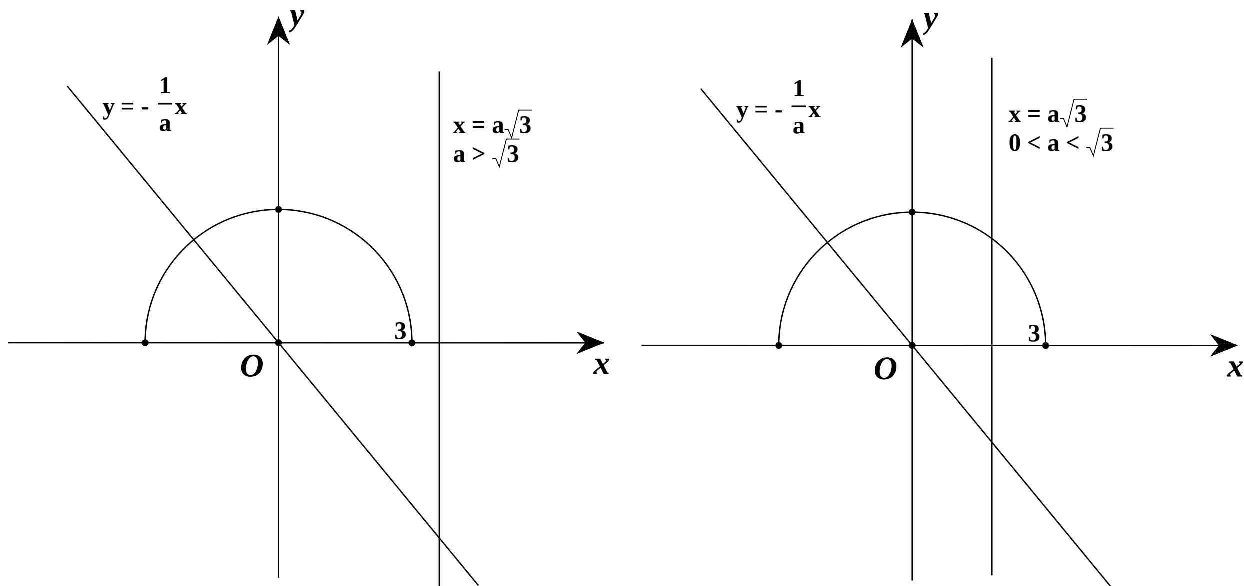
$$\left(a\sqrt{9-x^2}+x\right)\left(x-a\sqrt{3}\right)=0$$

Giải

Đặt $y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=9$
Phương trình (4) tương đương:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9,\ y \geqslant 0 \\ (ay+x)\left(x-a\sqrt{3}\right)=0 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình thứ nhất biểu diễn phần phía trên trục hoành của đường tròn tâm là gốc tọa độ bán kính là 3 còn phương trình thứ hai biểu diễn hai đường thẳng $x=a\sqrt{3}$ và $y=-\dfrac{1}{a}.x$ (nếu $a \neq 0$).
Số nghiệm của hệ chính là số giao điểm của hai đường thẳng với nửa đường tròn. Ta chỉ cần xét khi $a>0$ (vì khi $a<0$ ta có kết quả tương tự và khi $a=0$ thì (4) $\Leftrightarrow x=0$ và lúc đó hệ có 1 nghiệm).
Thấy rằng đường thẳng $y=-\dfrac{1}{a}x$ nên nó đi qua O và vì vậy luôn cắt nửa đường tròn tại một điểm. Ta chỉ cần quan tâm đến vị trí tương đối của $x=a\sqrt{3}$ với đường tròn và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{a}x$.
Do $y \geqslant 0$ nên nếu đường tròn và hai đường thẳng đồng quy thì phải có $x=a\sqrt{3}>0$ và $y=-\dfrac{1}{a}x<0$. Điều này là vô lý. Do đó sẽ không có trường hợp ba đường này đồng quy. Như thế nhìn vào đồ thị ta sẽ thu được kết luận:



Do đó ta có kết luận sau:

- Phương trình (4) có một nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ |a| > \sqrt{3} \end{array}\right.$
- Phương trình (4) có hai nghiệm $\Leftrightarrow 0 < |a| < \sqrt{3}$ □

Bài 10: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{9 - 2x - x^2} = x + m \ ((*)$$

Giải

Quan sát một chút ta thấy bài này có cấu trúc hơi khác các bài trên nhưng thật ra chúng như nhau:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{10 - (x+1)^2} = x + m$$

Đặt $z = x + 1;\ y = \sqrt{10 - z^2}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 10 \\ y - z = m - 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Bài toán đưa về biện luận số điểm chung của đường thẳng $y = z + m - 1$ và nửa đường tròn

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 10 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Đến đây tương tự như Bài 1, xin dành cho bạn đọc giải quyết tiếp phần còn lại của bài toán.

Bài 11: Biện luận số nghiệm của phương trình

$$2\sin t - (m+3)\cos t = m - 1,\ t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

Giải

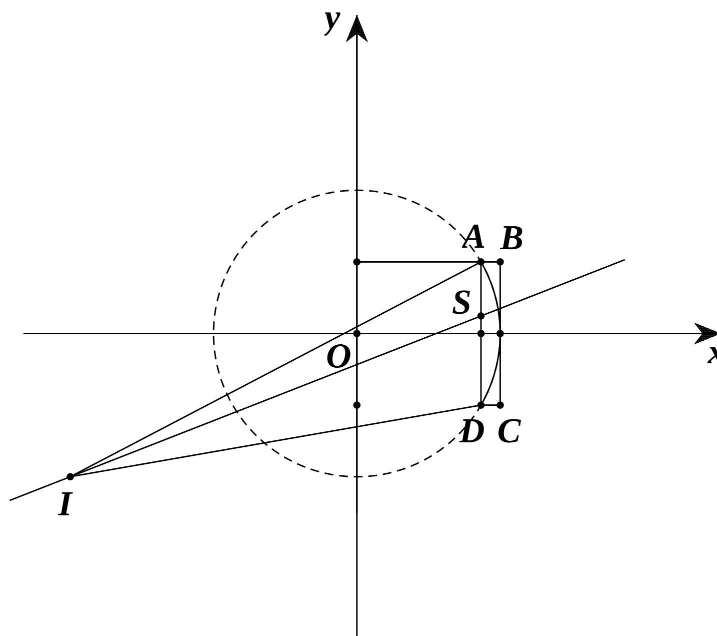
Đặt $x = \sin t;\ y = \cos t$ và đưa điều kiện của bài toán thành:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{(i)} \\ 2x - (m+3)y = m - 1 & \text{(ii)} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant 1 & \text{(iii)} \\ \dfrac{-1}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2} & \text{(iv)} \end{cases}$$

Do hai điều kiện (iii) và (iv) nên ta chỉ cần khảo sát nghiệm trong hình chữ nhật $ABCD$ trong đó:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(1; \frac{1}{2}\right), C\left(1; \frac{-1}{2}\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

Do đó bài toán đưa về khảo sát số giao điểm của đường thẳng $d:\ 2x - (m+3)y = m - 1$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ nằm trong hình chữ nhật $ABCD$, hệ có nghiệm thì chỉ có nghiệm duy nhất.



Các đỉnh A và D thuộc đường tròn đơn vị. Các đỉnh còn lại nằm ngoài đường tròn. Hơn nữa đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định $I(-2, -1)$, do đó để hệ có nghiệm thì đường thẳng d phải nằm trong phần giới hạn của hai tia IA, ID. Lại có d cắt AD tại điểm $S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1-m}{m+3}\right)$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}+1-m}{m+3} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}+4}{m+3} - \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}+4}{m+3} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{3} \geqslant 5 \geqslant \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$

Miền góc chứa tập hợp điểm thoả mãn hệ điều kiện trên có biên là các đường thẳng ứng với các giá trị của $m = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\right)$ và $m = 2\sqrt{3} + 5$ □

★ Một vài bài toán khác

Hai phần trên chúng ta đã tiếp cận với cách giải toán bằng hình học, đồ thị, trong phần này, chúng ta sẽ thực sự thấy được vẻ đẹp của việc giải toán bằng hình học, các bài toán trong phần này thường không mẫu mực và có cách giải quyết khác nhau tùy dạng toán, ta bắt đầu với ví dụ sau:

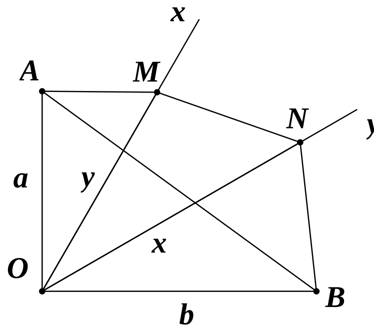
Bài 12: Tìm các bộ số (x, y) dương thỏa mãn phương trình:

$$\sqrt{x^2+b^2-bx\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+a^2-ay\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Trong đó a, b là các số thực dương cho trước.

Giải

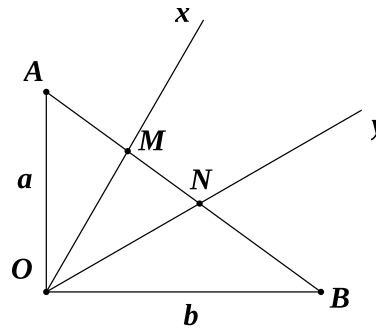
⊛ Ý tưởng: Các bài toán ở hai phần trước chỉ đề cập đến biện luận nghiệm của phương trình, hệ phương trình, nhưng đây là một bài về giải phương trình, cách tiếp cận hoàn toàn khác.
Ta chú ý đến nhận xét sau: vế trái là ba căn thức có dạng gần giống định lý Cosin trong tam giác, vế phải là biểu thức gần giống công thức tính đường chéo của cạnh huyền (định lý Pytagore). Hơn nữa lại có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng là $AM + MN + NB \geqslant AB$. Do đó ta đi đến lời giải như sau:
⊛ Lời giải:
Điều kiện: $x^2+b^2-bx\sqrt{3}, y^2+a^2-ay\sqrt{3}, x^2+y^2-xy\sqrt{3} \geqslant 0$ Dựng tam giác vuông OAB có $OA = a$, $OB = b$. Ox và Oy là hai đường chia ba các góc của tam giác, trên Ox lấy M và trên Oy lấy N sao cho $OM = y$ và $ON = x$ (như hình vẽ)



Khi đó ta có được $AM = \sqrt{OA^2 + OM^2 - 2OA.OM.\cos\dfrac{\pi}{6}} = \sqrt{a^2+y^2-ay.\sqrt{3}}$.
Tương tự: $MN = \sqrt{x^2+y^2-xy.\sqrt{3}}$, $BN = \sqrt{x^2+b^2-bx.\sqrt{3}}$, $AB = \sqrt{a^2+b^2}$.
Hơn nữa $AM + MN + BN \geqslant AB$ nên:

$$\sqrt{x^2+b^2-bx\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+a^2-ay\sqrt{3}}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

Do điều kiện của bài toán nên dấu bằng xảy ra, nói cách khác M và N lần lượt là giao điểm của Ox và Oy với AB.
Đến đây ta chỉ cần tìm OM, ON nữa là được!



Ta có:

$$S_{OAB} = S_{OAM} + S_{OBM} \Leftrightarrow ab = \frac{1}{2}ay + \frac{\sqrt{3}}{2}by \Leftrightarrow y = \frac{2ab}{a+\sqrt{3}.b}$$

Tương tự ta tìm được $x = \dfrac{2ab}{\sqrt{3}.a+b}$

Do đó nghiệm của bài toán là $x = \dfrac{2ab}{\sqrt{3}.a+b}, y = \dfrac{2ab}{a+\sqrt{3}.b}$ □

⊛ Nhận xét: Bài toán trên cho thấy được việc sử dụng hình học để giải toán sẽ đưa bài toán về một bài toán khá nhẹ nhàng. Ta cùng đến với ví dụ tiếp theo:

Bài 13: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1} + \sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1} = 3$$

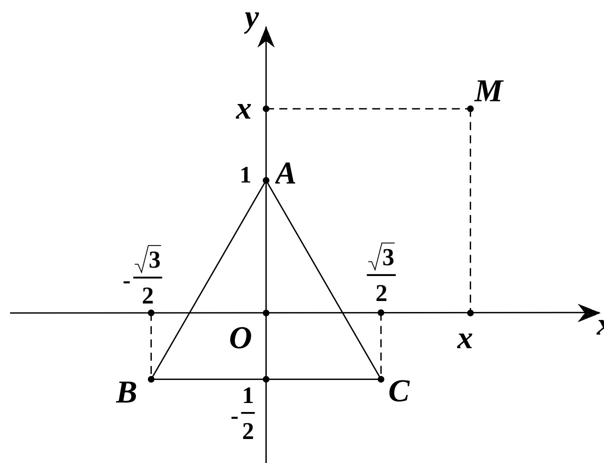
Giải

⊛ Ý tưởng: Cũng giống như trên, vế trái gợi ý ta dùng định lý Cosin cho tam giác nhưng không thể được. Ta sẽ phải sử dụng cách giải khác.

Phân tích từ biểu thức đơn giản nhất ta có được: $2x^2-2x+1 = x^2+(x-1)^2$. Do đó ý tưởng của chúng ta cũng là phân tích các biểu thức còn lại thành tổng hai bình phương, do đó ta sẽ có lời giải sau:

⊛ Lời giải:

Trong hệ tọa độ Oxy lấy các điểm $M(x,x)$, $A(0,1)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.



Khi đó ta có:

$$\begin{cases} MA = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \\ MB = \sqrt{2x^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)x + 1} \\ MC = \sqrt{2x^2 - \left(\sqrt{3}-1\right)x + 1} \end{cases}$$

Như vậy $VT = MA + MB + MC \geqslant TA + TB + TC$ với T là điểm Torricelli của tam giác ABC.

Dễ có được tam giác ABC là tam giác đều và T chính là gốc tọa độ, do đó

$$MA + MB + MC \geqslant 3TA = 3$$

Theo điều kiện bài toán thì dấu đẳng thức xảy ra hay $M \equiv T$, do đó $x = 0$ □

⊛ Nhận xét: Bằng cách phân tích các biểu thức như trên ta hoàn toàn có thể giải bằng cách sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz. Công việc của ta là đánh giá được BĐT sau:

$$\sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \geqslant 3$$

Có thể thiết lập bất đẳng thức trên bằng cách chọn tham số.

Mỗi cách làm đều có ưu nhược điểm. Dùng điểm Toricelli sẽ cho lời giải nhẹ nhàng, nhưng nếu $\triangle ABC$ không đều việc tính toán sẽ gặp khó khăn. Dùng tham số có thể tổng quát bài toán nhưng đôi khi nghiệm nhận được rất phức tạp.

Dưới đây sẽ là một ví dụ với cách giải khác hoàn toàn với hai bài toán trên.

Bài 14. Giải phương trình sau:

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ở Bài này rõ ràng việc đưa các biểu thức chứa căn thành độ dài một đoạn thẳng gặp khó khăn vì các biểu thức không có dạng bậc hai. Tuy thế trong bài này phương pháp hình học vẫn phát huy tác dụng. Biến đổi phương trình một chút ta có:

$$x.\sqrt{x+1} + 1.\sqrt{3-x} = \sqrt{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3-x}\right)^2}.\sqrt{x^2+1}$$

Vế phải khiến ta nghĩ đến tích độ dài còn vế trái giúp ta nghĩ đến tích vô hướng của hai vector, từ đó ta hình thành lời giải như sau:

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Đặt $\overrightarrow{a} = (x, 1)$; $\overrightarrow{b} = \left(\sqrt{x+1}, \sqrt{x+3}\right)$ ta có $\begin{cases} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \\ |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3-x}\right)^2} \end{cases}$

Hơn nữa ta lại có $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \leqslant |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|$

Do đó ta có:

$$x.\sqrt{x+1} + 1.\sqrt{3-x} \leqslant \sqrt{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{3-x}\right)^2}.\sqrt{x^2+1}$$

Như vậy theo điều kiện ta phải tìm x trong trường hợp dấu bằng xảy ra tức là ta có:

$$\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \Rightarrow x.\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 1 \\ x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad \square$$

Ba ví dụ trên chúng ta đã tiếp cận cách giải phương trình bằng hình học, sau đây sẽ là một ví dụ về giải hệ phương trình.

Bài 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2-a^2} + \sqrt{z^2-a^2} \\ y = \sqrt{z^2-b^2} + \sqrt{x^2-b^2} \\ z = \sqrt{x^2-c^2} + \sqrt{y^2-c^2} \end{cases}$$

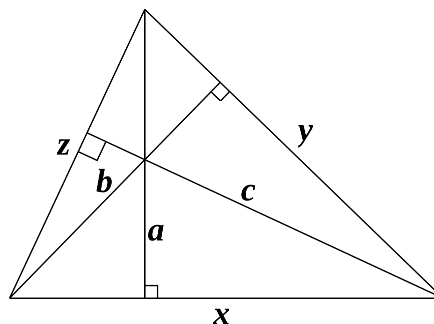
Trong đó a, b, c là các số thực dương cho trước thỏa mãn $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là ba cạnh của tam giác không tù.

Giải

⊛ Ý tưởng: Rõ ràng ngay khi nhìn vào đề bài thì giả thiết "a, b, c là các số thực dương cho trước thỏa mãn $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là ba cạnh của tam giác không tù" khiến ta cảm thấy khá rối. Tuy nhiên nếu chú ý đến phân tích sau thì mọi việc hoàn toàn dễ dàng:
Với một tam giác không tù có ba cạnh là a, b, c các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c và diện tích là S. ta có:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2S} = \dfrac{1}{h_a} \\ \dfrac{b}{2S} = h_b \\ \dfrac{c}{2S} = h_c \end{cases}$$

Từ đó chú ý rằng $\frac{a}{2S}, \frac{d}{2S}, \frac{c}{2S}$ là ba cạnh của tam giác không tù đồng dạng với tam giác có ba cạnh là a, b, c theo tỉ lệ $\frac{1}{2S}$ do đó $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ là ba cạnh của tam giác không tù. Vậy ta có lời giải như sau:
⊛ Lời giải:
Điều kiện $a^2, b^2 \leqslant z^2$; $b^2, c^2 \leqslant x^2$; a^2, $c^2 \leqslant y^2$.



Để hệ phương trình có nghiệm thì x, y, z phải dương nên suy ra $a, b \leqslant z$; $b, c \leqslant x$; $a, c \leqslant y$. Do đó ta luôn có thể dựng các tam giác sau:

- $\triangle A_1B_1C_1$ có $A_1B_1 = y$, $A_1C_1 = z$ và đường cao tại đỉnh A_1 bằng a đồng thời hai tia A_1B_1 và A_1C_1 nằm về hai phía đối với đường cao tại A_1. Khi đó theo phương trình thứ nhất dễ dàng có được $x = B_1C_1$.

- $\triangle A_2B_2C_2$ có $B_2A_2 = z$, $B_2C_2 = x$ đường cao tại đỉnh B_2 là b đồng thời hai tia B_2A_2, B_2C_2 nằm về hai phía đối với đường cao đỉnh B_2 thì $y = A_2C_2$.

- $\triangle A_3B_3C_3$ có $C_3A_3 = y$, $C_3B_3 = x$ đường cao tại đỉnh C_3 bằng c đồng thời hai tia C_3A_3, C_3B_3 nằm về hai phía đối với đường cao tại đỉnh C_3, khi đó $z = A_3B_3$.

Do đó ba tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ có ba cạnh bằng nhau nên chúng bằng nhau do đó diện tích của chúng bằng nhau suy ra $ax = by = cz = 2S$.
Áp dụng công thức Heron ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó $p = \dfrac{x+y+z}{2}$

Ta có: $x = \dfrac{2S}{a}$, $y = \dfrac{2S}{b}$, $z = \dfrac{2S}{c}$, $p = \dfrac{x+y+z}{2} = \dfrac{2S\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}{2}$. Do đó suy ra:

$$S = S^2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$$

Do đó:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}}$$

Từ đó ta có được: $x = \dfrac{2S}{a}$, $y = \dfrac{2S}{b}$, $z = \dfrac{2S}{c}$ $\square$.

Bài 16: Giải hệ phương trình ẩn $(a; b; c; d)$ sau:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \\ ac + bd + cd = \dfrac{9+6\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

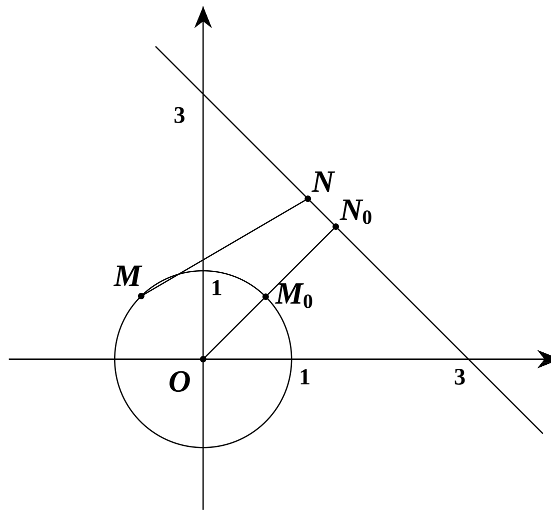
Giải

⊛ Ý tưởng: Rõ ràng bài toán trên là một bài toán không hề mẫu mực, chỉ có ba phương trình nhưng lại có tới 4 ẩn, hơn nữa phương trình thứ 3 khá phức tạp. Khó có thể biến đổi đại số, nên chúng ta nghĩ tới phương pháp hình học.
Với những gì chúng ta đã phân tích ở trên, ý tưởng hình học căn bản của ta sẽ là xét đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$ khi đó điểm $M(a, b)$ sẽ thuộc đường tròn này. Còn ở phương trình thứ 2 ta xét đường thẳng $(d) : x + y = 3$ thì điểm $N(c, d)$ sẽ thuộc đường thẳng này.

Quỹ tích những điểm $M(a, b)$ thỏa phương trình thứ nhất là đường tròn $(O; 1)$.
Quỹ tích những điểm $N(c, d)$ thỏa mãn phương trình thứ hai là đường thẳng $(d) : x + y = 3$.
Hơn nữa ta lại có:

$$\begin{aligned} &2(ac + bd + cd) = 2ac + 2bd + (c + d)^2 - c^2 - d^2 \\ &= 2ac + 2db + 10(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\ &= 10 - (a - c)^2 - (b - d)^2 = 10 - MN^2 \end{aligned}$$

Suy ra $10 - MN^2 = \dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow MN^2 = \dfrac{11 - 6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow MN = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
Do đó ta sẽ tìm hai điểm M, N nằm trên đường tròn $(O; 1)$ và đường thẳng $(d) : x + y = 3$ sao cho khoảng cách giữa chúng là $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
⊛ Lời giải:



Gọi N_0 là hình chiếu của O lên MN, và M_0 và M_0' là giao điểm của ON_0 với đường tròn đơn vị $(O; 1)$.
Nhận xét rằng nếu hệ phương trình có nghiệm thì ta phải có $NM_0 \leqslant MN \leqslant NM_0'$, do đó ta sẽ tính N_0M_0 và N_0M_0'.
Ta có: $M_0N_0 = ON_0 - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = MN$
Từ đó suy ra $M \equiv M_0$ và $N \equiv N_0$.
Dễ dàng tính được $M_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $N_0 = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$
Từ đó suy ra nghiệm của hệ □
⊛ Nhận xét: Bài toán trên rất đặc thù và may mắn là MN đạt giá trị nhỏ nhất. Trong một và trường hợp số $\dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$ của ta thay bằng số khác mà vẫn thỏa mãn hệ có nghiệm và MN không đạt cực trị thì việc làm bài toán sẽ rất khó khăn và hệ sẽ có vô số nghiệm, do đó thông thường các bài toán dạng này sẽ là vô nghiệm hay có nghiệm duy nhất.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Biện luận số nghiệm theo m của hệ $\begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = m \\ x + \sqrt{\dfrac{3}{7}}y = 1 \end{cases}$

Bài 2: Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = m \end{cases}$ có nghiệm $x, y > 0$

Bài 3: Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - my = m + 2 \end{cases}$ có nghiệm $x \leqslant 0 \leqslant y$

Bài 4: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\sqrt{5 - 2(x+m)^2} = x - 2$

Bài 5: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $4\sin t - 3\cos t = 2m - 1$ với $t \in [0; \pi]$

Bài 6: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\sqrt{5 - 4x} + \sqrt{m + 9x} = 1$

Bài 7: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leqslant a \\ 9 + (y+1)^2 \leqslant a \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$$

Tìm a để hệ có hai nghiệm.

Bài 9: Cho hệ:

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm.

Bài 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + mx - m = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$$

1. Biện luận số nghiệm của hệ theo m.
2. Khi hệ có hai nghiệm (x_1, y_1), (x_2, y_2). Xét đại lượng:

$$d = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

Tìm m để d đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11: Cho hệ:

$$\begin{cases} 2ax + y = 1 \\ x + 2y > a \end{cases}$$

Tìm m để hệ có ít nhất một nghiệm âm (tức là có ít nhất một nghiệm $(\overline{x}, \overline{y})$ trong đó $\overline{x} < 0$ và $\overline{y} < 0$)

Bài 12: Biện luận theo m số nghiệm của các phương trình sau:
a. $\sqrt{16-4x^2}=x-m$
b. $\sqrt{1-9x^2}=m-3x$
c. $\sqrt{2x-x^2}=2m-x$
d. $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2mx-x^2}$
e. $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-m^2+2mx-x^2}$
f. $\sqrt{4x^2-16}=m-2x$
Bài 13: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:
a. $\sqrt{1-x^2}\geqslant x-m$
b. $\sqrt{x^2-9}>x-m$
Bài 14: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\sqrt{12-3x^2}\leqslant x-m$
Bài 15: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$
Bài 16: Tìm m để các hệ sau có nghiệm:
a. $\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=y\\ 3mx-3y=5m\end{cases}$
b. $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=m\\ x+y=3m\end{cases}$
c. $\begin{cases}\sqrt{4-x^2}=y\\ mx-3y=2m\end{cases}$
Bài 17: Tìm m để các hệ sau có nghiệm:
a. $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-2}+x<1\\ x^2-2(m+2)x+1>0\end{cases}$
b. $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x+y\leqslant\sqrt{2xy+m}\end{cases}$
c. $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\ x+y+\sqrt{2x(y-1)+a}=2\end{cases}$
Bài 18: Tìm m để các hệ sau có nghiệm duy nhất:
a. $\begin{cases}x+y+\sqrt{2xy+m}\geqslant 1\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$
b. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x+y\leqslant m\end{cases}$
Bài 19: Biện luận theo a số nghiệm của các phương trình:
a. $|x|\left(3-4x^2\right)=a$.
b. $\left(\dfrac{1}{3}|x|-1\right)\left(|x|-1\right)^2=a$.
c. $x^2-2x-2=\dfrac{a}{|x-1|}$
d. $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a$.
e. $\dfrac{x^2+2}{|x|-1}=a$

f. $(x+1)^2 - a|x+2| = 0$

Bài 20: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

Tìm giá trị biểu thức $P = xy + 2yz + 3xz$

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa đẳng thức:

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{2}ab + b^2} + \sqrt{b^2 - \sqrt{2}bc + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{a+c}{b}$

Bài 22: Cho p, q là các số thực sao cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm thực có giá trị tuyệt đội không vượt quá 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = p^2(p^2 + 2q^2 - 3) + q^2(q^2 - 3)$$

Bài 23: Khảo sát số nghiệm của hệ phương trình theo a:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ VIỆC KHẢO SÁT HỆ PHƯƠNG TRÌNH 3 ẨN

Trong những bài toán sau ta quy ước $(x; y; z)$ là ẩn còn a, b, c là tham số.

Bài tập ví dụ:

Bài 1: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình với $r > 0$:

$$(*)\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r \\ ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \end{cases}$$

⊛ **Ý tưởng:**

Hệ (*) gồm một phương trình của một mặt cầu (W) với tâm là gốc tọa độ và một đường thẳng d. Tọa độ giao điểm của d và (W) là nghiệm của (*). Vì thế, bài toán được đưa về dạng biện luận số giao điểm của d và (W).

⊛ **Phương pháp:**

⁎ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $O(0; 0; 0)$ và vuông góc với đường thẳng

$d:\begin{cases} ax+by+cz=m \\ a'x+b'y+c'z=m' \end{cases}$ (**)

⋇ Tìm giao điểm K của (P) và d. Xét vị trí tương đối của K so với (W).

* Nếu K nằm trong (W) thì d cắt (W) tại hai điểm phân biệt và hệ (*) có hai nghiệm phân biệt.

* Nếu K nằm trên (W) thì d và (W) có một điểm chung và hệ (*) có nghiệm duy nhất

* Nếu K nằm ngoài (W) thì hệ (*) vô nghiệm.

Ví dụ 1: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau theo tham số m:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=22 \\ x+y+2z=m \\ x-z=2. \end{cases}$$

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua O và vuông góc với d là: $x-3y+z=0$.

Gọi K là giao điểm của (P) và d. Khi đó, tọa độ của K là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+2z=m \\ x-z=2 \\ z-3y+z=0 \end{cases}$

Giải hệ này ta được tọa độ điểm $K\left(\frac{3m}{11};\frac{2m}{11};\frac{3m}{11}\right)$.

* Nếu K nằm trong (W) khi và chỉ khi $\frac{2m^2}{11}<22 \Leftrightarrow -11\leqslant m\leqslant 11$. Khi đó, hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt.

* Nếu K nằm trên (W) khi và chỉ khi $m=11 \vee m=-11$. Khi đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

* Nếu K nằm ngoài (W) khi và chỉ khi $m>11 \vee m<-11$. Khi đó, hệ đã cho vô nghiệm. □

Ví dụ 2: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x+my+z=2m-4 \\ x-z=2 \end{cases}$$

Giải

Trong hệ (*) thì phương trình $x+my+z=2m-4$ thuộc chùm đường thẳng có trục là $\begin{cases} x+z=-4 \\ y-2=0 \end{cases}$.

Do đó đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x+my+z=2m-4 \\ x-z=2 \end{cases}$

Và d đi qua điểm cố định $K(-1;2;-3)$.

Ta thấy rằng K nằm trong mặt cầu (W): $x^2+y^2+z^2=16$ do đó d cắt (W) tại hai điểm phân biệt với mọi m. Vậy hệ đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

⊛ Mở rộng:

Rõ ràng là hệ phương trình ở bài toán 1. cho với mặt cầu nhận gốc tọa độ làm tâm. Tuy nhiên, ta cũng có thể tổng quát phương pháp trên lên với hệ có phương trình mặt cầu có tâm không phải là gốc tọa độ:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r \\ a_1x+b_1y+c_1z=m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=m_2 \end{cases} \quad (r>0)$$

Khi đó, nếu ta đặt: $u=x-a, v=y-b, w=z-c$ thì bài toán trên sẽ đưa về bài toán 1.

Ví dụ 3: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x-m)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16 \\ x+y+z=1 \\ x-z=2m \end{cases}$$

Giải

Đặt $u=x-m, v=y-2, w=z+1$ hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$(*)\begin{cases} u^2+v^2+w^2=16 \\ u+v+w=-m \\ u-w=m-1 \end{cases}$$

Đến đây ta chỉ cần biện luận số nghiệm của hệ (*) như phương pháp ở bài toán 1.

Bài 2: Biện luận nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{r-x^2-y^2}=px+qy+k \\ ax+by=c \end{cases}$$

⊛ **Phương pháp:**

Bằng cách đặt $z=\sqrt{r-x^2-y^2}$ thì hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r \\ z\geqslant 0 \\ ax+by=c \\ px+qy-z+k=0 \end{cases}$$

Hệ này gồm phương trình của nửa mặt cầu (W) và đường thẳng d. Bài toán cũng chuyển về dạng bài 1.

Ví dụ 1: Biện luận số nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{6-x^2-y^2}=2x+m \\ x-y=2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$. Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$(*)\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z \geqslant 0 \\ 2x - z = -m \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Hệ (*) gồm nửa mặt cầu (W) và đường thẳng d chứa tham số m.
Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu (W) và vuông góc với d. Phương trình mặt phẳng $(P) : x + y + 2z = 0$
Gọi H là giao điểm của d và (P), tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - z = -m \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $H\left(\frac{1-m}{3}; \frac{-m-5}{3}; \frac{m+2}{3}\right)$
Vậy đường thẳng d cắt nửa mặt cầu (W) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{m+2}{3} > 0 \\ \frac{m^2}{4} + \left(\frac{m}{2} + 2\right)^2 \geqslant 6 \\ \frac{(m-1)^2 + (m+5)^2 + (m+2)^2}{9} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3} - 1\right) > m \geqslant 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Đường thẳng d và nửa mặt cầu (W) có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{m+2}{3} > 0 \\ \frac{(m-1)^2 + (m+5)^2 + (m+2)^2}{9} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Kết luận:
* Khi $m = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất
* Khi $2\left(\sqrt{3} - 1\right) > m \geqslant 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$ thì hệ có hai nghiệm phân biệt
* Mọi giá trị còn lại của m làm hệ vô nghiệm. □
⊛ Nhận xét: Cũng bằng cách làm như ở mở rộng của bài toán 1, ta có thể mở rộng cho bài toán 2. với hệ có phương trình mặt cầu không nhận gốc tọa độ làm tâm:

$$\begin{cases} \sqrt{r - (x-m)^2 - (y-n)^2} = px + qy + k \\ ax + by = c \end{cases}$$

Bây giờ ta sẽ mở rộng thêm với hệ gồm hai phương trình mặt cầu.

Bài 3: Biện luận nghiệm của hệ phương trình:

$$(*)\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2\\ax+by+cz=m\end{cases}$$

⊛ **Ý tưởng:**

Ta nhận thấy ở hệ (*) có hai phương trình mặt cầu và một phương trình mặt phẳng. Nếu hai mặt cầu không có điểm chung thì hệ vô nghiệm. Nếu hai mặt cầu đó có điểm chung thì hệ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm phụ thuộc vào điểm chung đó thuộc hoặc không thuộc mặt phẳng $ax+by+cz=m$.

⊛ **Phương pháp:**

Trừ hai vế của hai phương trình đầu ta thu được một phương trình mặt phẳng có dạng: $(a_1-a_2)\,x+(b_1-b_2)\,y+(c_1-c_2)\,z=m'$. Ta gọi mặt phẳng này là mặt đẳng phương của hai mặt cầu. Dễ dàng nhận thấy mặt đẳng phương này chứa các điểm chung của hai mặt cầu và vuông góc với đường thẳng đi qua tâm của hai mặt cầu.

* Nếu hai mặt cầu tiếp xúc nhau tại K thì mặt đẳng phương là tiếp diện chung của hai mặt cầu tại K.

* Nếu hai mặt cầu cắt nhau thì giao tuyến của chúng là đường tròn nằm trong mặt đẳng phương.

Như vậy, việc khảo sát hệ phương trình trên chuyển về bài toán khảo sát hệ tương đương là:

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(x-b_1)^2+(x-c_1)^2=r_1\\(a_1-a_2)\,x+(b_1-b_2)\,y+(c_1-c_2)\,z=m'\\ax+by+cz=m\end{cases}$$

Việc khảo sát phương trình này chính là nội dung của bài toán 1.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Biện luận số nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2m^2-2\\x+y+z=0\\x-z=m+4\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sqrt{45-x^2-y^2}=m+2x\\x-y=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=29\\mx+y+z=-3m\\x-z=2\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt{6-(x-2)^2-(y+2)^2}=2x+m\\x-y=2\end{cases}$

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình sau có hai nghiệm phân biệt $(x_1;y_1;z_1)$

và $(x_2; y_2; z_2)$ để biểu thức $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ mx + y + z = m - 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

MỘT SỐ BÀI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ TRONG CÁC KÌ THI OLYMPIC

Bài 1: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m,n,p,k:

$$(I)\begin{cases} \sqrt{x - m^2} + \sqrt{y - m^2} = k \\ \sqrt{y - n^2} + \sqrt{z - n^2} = k \\ \sqrt{z - p^2} + \sqrt{x - p^2} = k \end{cases}$$

Trong đó $m, n, p, k > 0$ và thỏa $m + n + p = \dfrac{k\sqrt{3}}{2}$

Giải

Trước hết ta sẽ chứng minh (I) nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Thật vậy: Giả sử $(x_1; y_1; z_1)$ và $(x_2; y_2; z_2)$ là 2 nghiệm phân biệt của (I). Do vai trò của x,y,z như nhau nên ta giả sử $x_1 > x_2$

Khi đó từ phương trình thứ nhất của (I) ta có:

$$\sqrt{x_1 - m^2} + \sqrt{y_1 - m^2} = \sqrt{x_2 - m^2} + \sqrt{y_2 - m^2}$$

Suy ra $y_2 > y_1$

Hoàn toàn tương tự từ phương trình thứ hai của hệ ta chứng minh được $z_1 > z_2$

Từ phương trình thứ 3 ta suy ra được $x_2 > x_1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy (I) có nghiệm duy nhất.

Lại có

$$\begin{cases} m, n, p, k > 0 \\ m + n + p = k\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Nên tồn tại một $\triangle ABC$ đều cạnh k và một điểm I nằm trong tam giác sao cho khoảng cách từ I đến các cạnh là m, n, p.

Xét $\triangle FIA$ có $IA^2 - IF^2 = AF^2 \Leftrightarrow \sqrt{IA^2 - m^2} = AF$

Tương tự ta có $\sqrt{IB^2 - m^2} = BF$

Do đó $\sqrt{IA^2 - m^2} + \sqrt{IB^2 - m^2} = AF + BF = k.$

Từ phương trình 1 của hệ ta suy ra $x = IA^2, y = IB^2 \Rightarrow x = IC^2$

Vậy (I) có nghiệm: $\begin{cases} x = IA^2 \\ y = IB^2 \\ z = IC^2 \end{cases}$

Vậy với mọi m, n, p, k thoả đề bài thì (I)$\Leftrightarrow \begin{cases} x = IA^2 \\ y = IB^2 \\ z = IC^2 \end{cases}$ □

Bài 2: Tìm tất cả giá trị nguyên dương của n sao cho hệ phương trình sau có nghiệm dương:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

Giải

Giả sử hệ đã cho có nghiệm $x_1; x_2; ...; x_n$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2 \Rightarrow n^2 \leqslant 9 \Rightarrow n \leqslant 3$$

⋇ Với $n = 3$ thì hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 1 \end{cases}$ có nghiệm dương $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

⋇ Với $n = 2$, xét hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

Ta thấy phương trình $t^2 - 9t + 9 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương. Vậy $n = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

⋇ Với $n = 1$, ta có hệ: $\begin{cases} x_1 = 9 \\ \dfrac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$

Dễ thấy hệ trên vô nghiệm.

Như vậy $n \in \{2; 3\}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 3: Tìm tất cả giá trị của tham số m để hệ sau có 5 nghiệm thực:

$$(I) \begin{cases} x^3 - mx - y = 0 \\ y^3 - my + x = 0 \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy hệ đã cho luôn có nghiệm $x = y = 0\ \forall m$

Xét $x \neq 0$, $y \neq 0$ ta có $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - mx^2 - xy = 0 \\ y^4 - my^2 + xy = 0 \end{cases}$

Từ đó ta có $x^4 + y^4 = m(x^2 + y^2) \Rightarrow m > 0$.

Bài toán đã cho trở thành: tìm $m > 0$ để hệ có 4 nghiệm $(x; y) \neq (0; 0)$

Thế $y = x^3 - mx$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$x^2(x^2 - m)^3 - m(x^2 - m) + 1 = 0 \ (1)$$

Đặt $t = x^2 - m$, (1) tương đương với: $(*) \begin{cases} t^4 + mt^3 - mt + 1 = 0 \\ t > -m \end{cases}$

Đặt $u = t - \dfrac{1}{t}$, (*) trở thành: $u^2 - mu + 2 = 0$ (2)

Ta phải có $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant 2\sqrt{2}$. Khi đó (2) có 2 nghiệm

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2} \\ u_2 = \dfrac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2} \end{cases}$$

Xét hai phương trình sau:

$$\begin{cases} t - \dfrac{1}{t} = u_1 \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - (\sqrt{m^2-8} - m)t - 2 = 0 \ (3) \\ t - \dfrac{1}{t} = u_2 \Leftrightarrow g(t) = 2t^2 + (\sqrt{m^2-8} + m)t - 2 = 0 \ (4) \end{cases}$$

Ta có $f(-m).f(0) < 0$ và $g(-m).g(0) < 0$

Nên (3) có 2 nghiệm phân biệt $-m < t_1 < 0 < t_2$

Và (4) có 2 nghiệm phân biệt $-m < t_3 < 0 < t_4$

Ứng với mỗi t sẽ có hai giá trị của $x = \pm\sqrt{t+m}$.

Vậy để hệ đã cho có 4 nghiệm ta phải có $t_1 = t_3, t_2 = t_4 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$

Thử lại thấy đúng. Vậy $m = 2\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 4: Tìm điều kiện của các số a,b để hệ phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm với $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải

Giả sử hệ đã cho có ít nhất một nghiệm $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0$.

Ta có $|a| = |x_1 - x_2| < |x_1| + |x_2| = x_1 + x_2$

$|b| = |x_3 - x_4| < |x_3| + |x_4| = x_3 + x_4$

Từ đó suy ra $|a| + |b| < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Ngược lại nếu có $|a| + |b| < 1$ thì $c = 1 - (|a| + |b|) > 0$

Khi đó tùy theo $a; b$ âm hay dương mà hệ đã cho có nghiệm: $x_1 = |a| + \dfrac{c}{4}$, $x_2 = \dfrac{c}{4}$, $x_3 = |b| + \dfrac{c}{4}$, $x_4 = \dfrac{c}{4}$

$x_1 = \dfrac{c}{4}$, $x_2 = |a| + \dfrac{c}{4}$, $x_3 = |b| + \dfrac{c}{4}$, $x_4 = \dfrac{c}{4}$

$x_1 = |a| + \dfrac{c}{4}$, $x_2 = \dfrac{c}{4}$, $x_3 = \dfrac{c}{4}$, $x_4 = |b| + \dfrac{c}{4}$

Các nghiệm này đều thoả yêu cầu bài toán. □

Bài 5: Cho $a, b, c \neq 0$. Giải và biện luận hệ sau theo a, b, c:

$$(I) \begin{cases} a\sqrt{x-y+z}.\sqrt{x+y-z} = x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x+y-z}.\sqrt{y+z-x} = y\sqrt{xz} \\ c\sqrt{y+z-x}.\sqrt{x+y-z} = z\sqrt{xy} \end{cases}$$

Giải

Xét hai trường hợp sau đây:

⊛ Nếu có ít nhất một trong ba số $a, b, c < 0$. Ta giả sử $a < 0$. Khi đó từ phương trình đầu của hệ ta suy ra cả hai vế đều phải bằng 0, tức là ta có:

$$\begin{cases} x\sqrt{yz} = 0 \\ \sqrt{x-y+z}.\sqrt{x+y-z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ (x-y+z)(x+y-z) = 0 \end{cases}$$

Từ đó để ý đến điều kiện cho biểu thức trong căn có nghĩa thì đễ thoả mản phương trình thứ nhất của hệ ta phài có: $x = 0,\ y = z \geqslant 0$ hoặc $y = 0,\ x = z \geqslant 0$ hoặc $z = 0,\ x = y \geqslant 0$

Thay lại vào hai phương trỉnh sau thấy đúng. Đó chính là các nghiệm của hệ phuơng trình trong trường hợp này.

⊛ Nếu $a, b, c > 0$: Khi đó hệ đã cho tương đương với hệ

$$(II) \begin{cases} a^2(x-y+z)(x+y-z) = x^2yz \\ b^2(x+y-z)(y+z-x) = y^2xz \\ c^2(y+z-x)(x+z-y) = z^2xy \end{cases}$$

Rõ ràng (II) luôn có nghiệm $(0; 0; 0)$. Ta thử tìm nghiệm khác của hệ:

Nhân vế với vế của ba phương trình trong hệ trên rồi lấy căn bậc hai, ta được:

$$abc(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = x^2y^2z^2$$

Từ đó ta đi đến hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} bc(y+z-x) = ayz \\ ac(x+y-z) = bxz \\ ab(x+z-y) = cyx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc(y+z-x) = a^2yz \\ abc(x+y-z) = b^2xz \\ abc(x+z-y) = c^2yx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2y + b^2x = 2abc \\ b^2z + c^2y = 2abc \\ c^2x + a^2z = 2abc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{b^2+c^2-a^2} \\ y = \dfrac{b}{a^2+c^2-b^2} \\ z = \dfrac{c}{a^2+b^2-c^2} \end{cases}$$

Để $x, y, z > 0$, ta phải có: $a^2 + b^2 > c^2,\ b^2 + c^2 > a^2,\ c^2 + a^2 > b^2$

Tóm lại ta đi đến kết luận sau:

⁎ Nếu có ít nhất một trong ba số $a, b, c < 0$ thì nghiệm của hệ là: $(0; \alpha; \alpha)$, $(\alpha; \alpha; 0)$, $(\alpha; 0; \alpha)$ với $\alpha > 0$ tuỳ ý.

⁎Nếu cả ba số a, b, c đều dương thì:

* Nếu $a^2 + b^2 > c^2,\ b^2 + c^2 > a^2,\ c^2 + a^2 > b^2$ thì nghiệm của hệ là $(0; 0; 0)$ và $\left(\dfrac{a}{b^2+c^2-a^2}; \dfrac{b}{a^2+c^2-b^2}; \dfrac{c}{a^2+b^2-c^2}\right)$

* Nếu có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau: $a^2 + b^2 \leqslant c^2,\ b^2 + c^2 \leqslant a^2,\ c^2 + a^2 \leqslant b^2$ thì nghiệm của hệ chỉ là $(0; 0; 0)$ □

Bài 6: Giả sử $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in (0; 1)$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a}{m+2}x^{m+2} + \dfrac{b}{m+1}x^{m+1} + \dfrac{c}{m}x^m$, $x \in [0, 1]$
$f'(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}(ax^2 + bx + c)$
Ta lại có: $f(0) = 0$ và $f(1) = \dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$
Do đó theo định lý Lagrange thì tồn tại $x_0 \in (0, 1)$sao cho $f(1) - f(0) = (1 - 0)f'(x_0)$
Nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow {x_0}^{m-1}(a{x_0}^2 + bx_0 + c) = 0$
$\Leftrightarrow a{x_0}^2 + bx_0 + c = 0$
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 7: Cho phương trình

$$x^3 - 2002x^2 + 2001bx - 2000a = 0$$

Tìm giá trị lớn nhất của a sao cho tồn tại b để phương trình trên có 3 nghiệm trên $[-2002, 2002]$

Giải

Giả sử x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình. Khi đó theo định lý Viete cho phương trình bậc ba ta có:

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2002 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2001b \\ x_1x_2x_3 = 2000a \end{cases}$$

Xảy ra các trường hợp sau:
⁎ Nếu $x_2 < 0$ hoặc $x_3 < 0$ khi đó $x_1 + x_2 + x_3 < x_3 \leqslant 2002$. Điều này mâu thuẫn với phương trình thứ nhất của (I)
⁎ Nếu $x_1 < 0 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, từ phương trình ba của (I) suy ra $a \leqslant 0$.
⁎ Nếu $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2002 = x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = \sqrt[3]{2000a} \Rightarrow a \leqslant \frac{2002^3}{54000}$$

Dấu = xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{2002}{3}$ và khi ấy $b = \dfrac{2002^2}{6003}$
Bây giờ ta xét bài toán trong trường hợp $a = \dfrac{2002^3}{54000}$ và $b = \dfrac{2002^2}{6003}$
Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$x^3 - 2002x^2 + \frac{2002^2}{3}x - \frac{2002^2}{3^3} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{2002}{3})^3 = 0$$

Phương trình trên có 3 nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{2002}{3} \in$ [-2002,2002]
Vậy $a_{max} = \dfrac{2002^3}{54000}$ là giá trị cần tìm □

Bài 8: Tìm tất cả giá trị của tham số a sao cho phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x + 4|y| = |x| \\ |y| + |x - a| = 1 \end{cases}$$

Giải

Ta xét hai trường hợp sau:
⋇ Nếu $x \geqslant 0$ thì $y = 0$. Khi đó:

- Với $a > 1$ thì hệ có hai nghiệm phân biệt với $x \geqslant 0$ là $(a-1;0), (a+1;0)$.
- Với $-1 \leqslant a \leqslant 1$ hệ chỉ có một nghiệm với $x \geqslant 0$ là $(a+1;0)$.
- Với $a < -1$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

⋇ Nếu $x < 0$: Ta có $|y| = \dfrac{-x}{2}$ và $|x-a| = 1 + \dfrac{x}{2}$

Hay $\begin{cases} 1 + \dfrac{x}{2} \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - a = 1 + \dfrac{x}{2} \\ x - a = -1 - \dfrac{x}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2(1+a) \\ x = \dfrac{2(a-1)}{3} \end{array}\right. \end{cases}$

Mặt khác $-2 \leqslant 2(a+1) < 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant a < -1$ và $-2 \leqslant \dfrac{2}{3}(a-1) < 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant a < 1$.
Rõ ràng nếu $(x;y)$ là một nghiệm của hệ với $x < 0$ thì $y \neq 0$ và $(x;-y)$ cũng là một nghiệm của hệ. Do đó:

- Khi $a < -2$ thì hệ vô nghiệm.
- Khi $a = -2$ ta có $x = 2(a+1) = -2$ và $x = \dfrac{2}{3}(a-1) = -2$ nên hệ có đúng hai nghiệm phân biệt $(2;\pm 1)$.
- Khi $-2 < a < 1$ thì $2(a+1) \neq \dfrac{2}{3}(a-1)$ và hai giá trị này cho hệ có 4 nghiệm.
- Khi $-1 < a < 1$ thì hệ có 3 nghiệm.

Tóm lại hệ đã cho có đúng hai nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} a \geqslant 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$ □

Bài 9: Tìm a, b, c, d sao cho phương trình sau có nghiệm $x \in \mathbb{R}$:

$$(2x-1)^{40} - (ax+b)^{40} = (x^2 + cx + d)^{20} \ (1)$$

Giải

Vì (1) đúng với mọi x nên cũng đúng khi $x = \dfrac{1}{2}$

Với $x = \dfrac{1}{2}$, (1) $\Rightarrow \left(\dfrac{a}{2} + b\right)^{40} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{c}{2} + d\right)^{20} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ \dfrac{c}{2} + d = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ (2)

Thay $a = -2b$ vào (1) ta được:

$$(2x-1)^{40} = (-2bx+b)^{40} + (x^2 + cx + d)^{20} \forall x$$

Hệ số x^{40} của hai vế là 2^{40} và $2^{40}b^{40}+1$ do đó suy ra $2^{40}=2^{40}b^{40}+1 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}\sqrt[40]{2^{40}-1}$
(1) trở thành

$$\begin{aligned}&(2x-1)^{40}=b^{40}(-2x+1)^{40}+\left(x^2+cx+d\right)^{20}\ \forall x\\ &\Leftrightarrow (2x-1)^{40}(1-b^{40})=\left(x^2+cx+d\right)^{20}\ \forall x\\ &\Leftrightarrow (2x-1)^{40}\frac{1}{2^{40}}=\left(x^2+cx+d\right)^{20}\forall x\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^{40}=\left(x^2+cx+d\right)^{20}\ \forall x\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}=\pm(x^2+cx+d)\ \forall x\end{aligned}$$

⋇ Xét khi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2+cx+d\,\forall x \Leftrightarrow c=-1 \vee c=-1$ và $d=-\frac{1}{4}$ (thoả (2))
⋇ Xét khi $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-(x^2+cx+d)\,\forall x$: không có c,d thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy $a=-2b,\ b=\pm\frac{1}{2}\sqrt[40]{2^{40}-1},\ c=-1$ và $d=-\frac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm □.

Bài 10: Cho hệ phương trình sau (ẩn x,y):

$$\begin{cases}x=y^2+a\\ y=x^2+b\end{cases}$$

với a,b là các tham số thực. Biết rằng hệ phương trình này có nghiệm duy nhất (x_0,y_0). Tính giá trị của tích $P=x_0y_0$.

Giải

Đầu tiên ta cùng xem qua lời giải sau:

Giả sử với các giá trị a,b nào đó, hệ đã cho có nghiệm duy nhất là (x_0,y_0). Đặt $x_0y_0=k\in\mathbb{R}$.
⋇ Nếu $x_0=0$ thì $y_0=b$ và $b^2+a=0$, suy ra $a\leqslant 0$.
Trong hệ đã cho, thay y từ phương trình thứ hai lên phương trình thứ nhất, ta có

$$\left(x^2+b\right)^2+a=x \Leftrightarrow x^4+2bx^2+b^2+a=x \Leftrightarrow x(x^3+2bx-1)=0\ (*)$$

Ta xét phương trình $x^3+2bx-1=0$và đặt $f(x)=x^3+2bx-1, x\in\mathbb{R}$.
Ta thấy hàm này liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0)=-1<0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $f(x)=0$ hay phương trình $x^3+2bx-1=0$ có ít nhất một nghiệm dương $x=x_1>0$.
Dễ thấy rằng điều kiện để x thỏa mãn đề bài là $x=y^2+a\geqslant a$ nên cả hai nghiệm đã nêu $x=x_0=0, x=x_1$ của phương trình $(*)$ đều thỏa mãn. Mỗi giá trị x cho ta đúng một giá trị y nên trong trường hợp này hệ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, không đúng với đề bài.
⋇ Nếu $y_0=0$ thì cũng xét tương tự như trên.
⋇ Nếu $x_0,y_0\neq 0$. Thay $y_0=\frac{k}{x_0}$ vào hai phương trình của hệ đã cho, ta được:

$$\begin{cases}x_0=\dfrac{k^2}{x_0^2}+a\\ \dfrac{k}{x_0}=x_0^2+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0^3=k^2+ax_0^2\\ k=x_0^3+bx_0\end{cases} \Rightarrow k=k^2+ax_0^2+bx_0 \Leftrightarrow k^2-k+(ax_0^2+bx_0)=0$$

Hệ có nghiệm duy nhất nên phương trình bậc hai theo k cũng có nghiệm duy nhất, tức là $k = \frac{1}{2}$. Vậy nếu hệ có nghiệm duy nhất thì tích $P = x_0y_0 = \frac{1}{2}$.

⊛ Nhận xét: Lời giải trên tuy nhìn hợp lí nhưng thật ra đã có một sai lầm rất tinh vi, đó là khi cho rằng hệ đã cho và phương trình thu được sau phép thế, còn gọi là phương trình hệ quả, là tương đương với nhau. Ở đây, rõ ràng nếu hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất thì chưa hẳn phương trình cuối theo biến k $k^2 - k + (ax_0^2 + bx_0) = 0$ có nghiệm duy nhất, trong đó vẫn có thể có một nghiệm không thỏa mãn đề bài. Cách biến đổi đại số dùng cho bài này khó có thể tìm ra được kết quả chính xác.

Lời giải đúng là như sau:

Trong hệ phương trình đã cho, thay y bởi $x^2 + b$ vào phương trình trên, ta có:

$$x = (x^2 + b)^2 + a$$

Dễ thấy các nghiệm của phương trình này đều thỏa mãn đề bài vì $x \geqslant a$, mà mỗi nghiệm như thế cho ta một giá trị tương ứng của y nên điều kiện để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là phương trình ẩn x trên có nghiệm duy nhất.

Phương trình bậc 4 có nghiệm duy nhất khi nó có nghiệm kép, điều đó có nghĩa là nghiệm đó cũng là nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0.

Gọi x_0 là nghiệm đó (tương ứng với giá trị y_0) thì ta có hệ sau

$$\begin{cases} x_0 = (x_0^2 + b)^2 + a \\ 4x_0(x_0^2 + b) = 1 \end{cases}$$

Hơn nữa, do x_0 là nghiệm của hệ ban đầu nên $x_0^2 + b = y_0$, suy ra $x_0y_0 = \frac{1}{4}$. Vậy nếu hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì tích $P = x_0y_0 = \frac{1}{4}$.

MỞ RỘNG:

Để giải quyết trọn vẹn bài toán, chúng ta sẽ làm rõ hơn các vấn đề sau:

Vấn đề 1: Nếu phương trình bậc 4 có nghiệm duy nhất khi nó có nghiệm kép, điều đó có nghĩa là nghiệm đó cũng là nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0.

⊛ Lời giải:

Xét đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, giả sử đa thức này có nghiệm duy nhất là $x = x_0$. Khi đó, theo định lí Bezóut, ta có thể phân tích đã thức đã cho thành $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc 3 Đa thức bậc ba $Q(x)$ luôn có ít nhất một nghiệm nên nghiệm đó cũng phải là $x = x_0$. Ta lại phân tích đa thức ban đầu thành $P(x) = (x - x_0)^2R(x)$ với $R(x)$ là đa thức bậc 2

Suy ra $P'(x) = 2(x - x_0)R(x) + (x - x_0)^2R'(x) = (x - x_0)\left[2R(x) + (x - x_0)R'(x)\right]$.

Đa thức này cũng có nghiệm là $x = x_0$ nên ta có đpcm. □

Vấn đề 2: Tìm điều kiện cần của hai tham số a, b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

⊛ Lời giải:

Từ cách giải phân tích ở trên, ta thấy rằng a, b phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x = (x^2+b)^2 + a \\ 4x(x^2+b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x^2+b)^2 + a \\ x^2 + b = \dfrac{1}{4x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+b}{4x} + a = x \Rightarrow 3x^2 - 4ax - b = 0(**)$$

Suy ra $x^2 = \dfrac{4ax+b}{3}$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ trên, ta được

$$4x\left(\frac{4ax+4b}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x\left(\frac{4ax+4b}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 16ax^2 + 16bx - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3-16bx}{16a}$$

Do đó

$$\frac{3-16bx}{16a} = \frac{4ax+b}{3} \Leftrightarrow x = \frac{9-16ab}{64a^2+48b}$$

Thay vào phương trình $(**)$, ta có

$$3\left(\frac{9-16ab}{64a^2+48b}\right)^2 - 4a\left(\frac{9-16ab}{64a^2+48b}\right) - b = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(9-16ab)^2 - 4a(64a^2+48b)(9-16ab) - b(64a^2+48b)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 256(a^3+b^3+a^2b^2) + 288ab = 27 \Leftrightarrow 256(a+b^2)(b+a^2) = 27 - 32ab$$

Biểu thức này đối xứng giữa a và b nên nếu lặp lại quá trình biến đổi trên với y thì ta cũng có kết quả tương tự. Do đó, điều kiện cần của hai tham số a, b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất là a, b phải thỏa mãn đẳng thức sau

$$256(a+b^2)(b+a^2) = 27 - 32ab$$

Một cặp giá trị đẹp thỏa mãn đẳng thức trên là $(a, b) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ và tương ứng với nghiệm duy nhất của hệ là $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ □.

Vấn đề 3: Bài toán mở rộng.

Bài toán trên có thể mở rộng ra cho bậc cao hơn của x và y như sau:

Bài 10*: Cho hệ phương trình sau (ẩn x, y) với a, b là các tham số thực:

$$\begin{cases} x = y^{2n} + a \\ y = x^{2n} + b \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

Biết rằng hệ phương trình này có nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Hãy tính tích $P_n = x_0y_0$.

⊛ Lời giải:

Thay $y = x^{2n} + b$ vào $x = y^{2n} + a$, ta được $x = (x^{2n}+b)^{2n} + a$.

Đa thức này bậc chẵn nên chứng minh tương tự nhận xét (1) nêu trên, ta thấy a, b phải thỏa

$$\begin{cases} x_0 = (x_0^{2n}+b)^{2n} + a \\ (2n)^2 x_0^{2n-1}(x_0^{2n}+b)^{2n-1} = 1 \end{cases}$$

Lại thay $y_0 = x_0^{2n} + b$ vào đẳng thức trên, ta có

$$(2n)^2 x_0^{2n-1} y_0^{2n-1} = 1 \Leftrightarrow x_0y_0 = (4n^2)^{1-2n}$$

Vậy nếu hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì $P_n = (4n^2)^{1-2n}$ $\square$.
Bài toán ban đầu là trường hợp đặc biệt khi $n = 1$.
Chú ý rằng ta cho bậc ở đây chẵn để x_0y_0 nhận một giá trị, bài toán hoàn toàn có thể mở rộng với số mũ tùy ý nhưng trong trường hợp bậc lẻ thì có thể có 2 giá trị của x_0y_0.
Ngoài ra kết quả thú vị từ biểu thức điều kiện cần ở trên cũng cho ta một bài Bất đẳng thức hay:
Ta lại thấy rằng nếu xét giả thiết $a+b \geqslant 0$ thì có thể chứng minh rằng $ab \leqslant \frac{1}{16}$. Thật vậy, nếu có một số âm, một số dương thì điều này đúng. Ngược lại thì chỉ cần dùng BĐT AM-GM kết hợp với ẩn phụ để đánh giá.
Rõ ràng điều kiện $a+b \geqslant 0$ có thể được thay thế bằng $a+b \geqslant c$ với $c \leqslant \frac{1}{8}$. Ở đây có thể chọn $c = \frac{1}{2012}$.
Chuyển hệ đã cho về

$$\begin{cases} x^2 - y = b \\ y^2 - x = a \end{cases}$$

Rõ ràng phương trình trên chuyển được thành phương trình dưới thông qua một phép hoán đổi vị trí giữa hai biến.
Như vậy ta có bài toán sau:

Bài 10:** Cho đa thức $P(x,y) = x - y^2$ với $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Xét $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại đúng một cặp số thực $x_0, y_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn $P(x_0, y_0) = b$ và $P(y_0, x_0) = a$.
Chứng minh rằng nếu $a + b \geqslant \frac{1}{2012}$ thì $4ab \leqslant x_0y_0$.

Sau đây là một bài toán về hệ bất phương trình:

Bài 11: Tìm a để hệ bất phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{1+a} (*) \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

Giải

⊛ Điều kiện cần: Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ và a_0 là một trong các giá trị cần tìm. Vậy thì:

$$\begin{cases} {x_0}^2 + 2x_0y_0 - 7{y_0}^2 \geqslant \dfrac{1-a_0}{1+a_0} \\ 3{x_0}^2 + 10x_0y_0 - 5{y_0}^2 \leqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2{x_0}^2 - 4x_0y_0 + 14{y_0}^2 \leqslant 2 - \dfrac{4}{1+a_0} \ (1) \\ 3{x_0}^2 + 10x_0y_0 - 5{y_0}^2 \leqslant -2 \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$${x_0}^2 + 6x_0y_0 + 10{y_0}^2 \leqslant -\frac{4}{1+a_0} \Leftrightarrow (x_0 + 3y_0)^2 \leqslant -\frac{4}{1+a_0} \Rightarrow 1 + a_0 < 0 \Rightarrow a_0 < -1$$

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm là $a < -1$.

⊛ Điều kiện đủ: Với $a < -1$ thì $\frac{1-a}{1+a} < -1$.

Do đó nếu hệ phương trình $(I)\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1 \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2 \end{cases}$ có nghiệm thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Ta xét hệ (I):

$$(I)\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1 \\ (x+3y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3}{2}; y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}; y=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Hệ (I) có nghiệm nên hệ bất phương trình đã cho có nghiệm.

Tóm lại, hệ bất phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi $a < -1$ □

⊛ Nhận xét: Đây là một bài toán tương đối khó, từng nằm trong kì thi Đại học. Điều đặc biệt của lời giải trên nằm ở điều kiện đủ khi chuyển việc chứng minh hệ bất phương trình có nghiệm về việc giải hệ phương trình đẳng cấp bậc hai. Tuy nhiên, mấu chốt của bài toán lại nằm ở điều kiện cần. Các bạn đã bao giờ nghĩ, làm cách nào để đưa được hệ bất phương trình ở đầu bài về dạng $f^2(x_0, y_0) \leqslant g(a)$ chưa? Hay nói cách khác, tại sao nghĩ tới việc nhân số (-2) vào bất phương trình (*)? Chúng ta hãy cùng xem qua ý tưởng sau đây:

Trước hết, ta thấy rằng:

$$⋇\ ax^2+bx+c \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=0 \\ c \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$⋇\ ax^2+bx+c \leqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=0 \\ c \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$⋇\ ax^2+bx+c = f^2(x) \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=0 \\ c \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a>0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{với } f(x)=\alpha x+\beta)$$

$$⋇ ax^2+bxy+cy^2 = f^2(x,y)\ \forall x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=0 \\ c \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a,c>0 \\ b^2-4ac = 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{với } f(x,y)=\alpha x+\beta y)$$

Mục tiêu của chúng ta là đưa hệ bất phương trình về dạng $0 \leqslant f^2(x_0, y_0) \leqslant g(a)$, chính vì lí do đó từ bất phương trình (*) ta cần nhân với một số $\alpha < 0$. Ta có:

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{1+a} \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x^2+2\alpha xy-7\alpha y^2 \leqslant \alpha\dfrac{1-a}{1+a} \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha+3)x^2+2(\alpha+5)xy-(7\alpha+5)y^2 \leqslant \alpha\frac{1-a}{1+a}-2\ (3)$$

Bây giờ, để ý đến vế trái của (3), ta cần biến đổi vế trái này về bình phương của một biểu thức với mọi x, y. Điều này chỉ tương đương với điều kiện sau:

$$\begin{cases} \alpha+3>0 \\ (\alpha+5)^2y^2+(\alpha+3)(7\alpha+5)y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3>0 \\ (\alpha+5)^2+(\alpha+3)(7\alpha+5)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+3>0 \\ 8\alpha^2+36\alpha+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-2 \\ \alpha=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Tuy nhiên, ở bài toán này, ta lại thấy có hai giá trị của α. Ta cần chọn lựa số α nào sẽ thích hợp.

Ta có:

$$-\frac{5(1-a)}{2(1+a)}-2-[-\frac{2(1-a)}{1+a}-2]=\frac{2(1-a)}{1+a}-\frac{5(1-a)}{2(1+a)}$$
$$=-\frac{1-a}{2(1+a)}>0 \text{ (do } \frac{1-a}{1+a}<0) \Rightarrow -\frac{5(1-a)}{2(1+a)}-2>-\frac{2(1-a)}{1+a}-2$$

Như vậy, từ bất phương trình (3) ta suy ra cần nhân vào hai vế của bất phương trình (*) với số $\alpha=-2$.

Từ đó ta cũng có thể sáng tạo nhiều bài toán mới, ví dụ như bài sau:

Bài 11*: Tìm a để các hệ bất phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2 \geqslant 3 \\ 7x^2+4xy+2y^2 \leqslant \dfrac{2a-1}{2a+5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x^2+7xy+2y^2 \geqslant \dfrac{3a+1}{a+2} \\ 3x^2+xy+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2-8xy-8y^2 \geqslant 2 \\ x^2-4xy+2y^2 \leqslant \dfrac{a+1}{2a+1} \end{cases}$

CHƯƠNG III: CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Một số cách đặt ẩn phụ cơ bản

Dạng 1: Phương trình có dạng $ax^2+bx+c=\sqrt{px^2+qx+r}$ trong đó $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}$

⊛ **Phương pháp:** Đặt $t=\sqrt{px^2+qx+r}, t\geqslant 0$ đưa về phương trình theo t.

Dạng 2: Phương trình có dạng

$$P(x)+Q(x)+(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)})\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}+\alpha=0\ (\alpha\in\mathbb{R})$$

⊛ **Phương pháp:** Đặt $t=\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\Rightarrow t^2=P(x)+Q(x)\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$.
Từ đó đưa về phương trình theo t.

Bài 1: Giải phương trình $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Giải

ĐKXĐ: $0\leqslant x\leqslant 1$
Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ thì $\sqrt{x-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$. Phương trình đầu trở thành

$$1+\frac{t^2-1}{3}=t\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow t=1;t=2$$

• Nếu $t=2\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2$ (vô nghiệm)
• Nếu $t=1\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;1\}$. □

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1/(ĐH Ngoại Thương-2000) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$
2/(ĐH Ngoại ngữ 1998) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$
3/(ĐH Cần Thơ 1999) $\sqrt{(x+1)(2-x)}=1+2x-2x^2$
4/ $4x^2+10x+9=5\sqrt{2x^2+5x+3}$
5/ $18x^2-18x+5=3\sqrt{9x^2-9x+2}$
6/ $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$
7/(HVKTQS-1999) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

8/ $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$
9/$\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x+1}=6x+\sqrt{8x^2+10x+3}-16$
10/(CĐSPHN-2001) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$

Đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích

Xuất phát từ một số hằng đẳng thức cơ bản khi đặt ẩn phụ:

- $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
- $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$
- $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- $4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

Mục tiêu của ta sau khi đặt ẩn phụ là đưa về những dạng cơ bản như

$$u+v=1+uv\Leftrightarrow(u-1)(v-1)=0$$

hay

$$au+bv=ab+vu\Leftrightarrow(u-b)(v-a)=0$$

Đối với phương trình đẳng cấp bậc hai $ax^2+bxy+cy^2=0$ có thể đặt $t=\dfrac{x}{y}$ (sau khi xét $y\neq 0$) để đưa về phương trình bậc hai theo $t: at^2+bt+c=0$.

Xét bài 1 ở trên, ta có cách đưa về phương trình tích như sau:

Bài 1*: Giải phương trình $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ $(*)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2=1$(**), mà từ phương trình đầu ta rút được một căn thức qua căn thức còn lại. Vậy ta có lời giải như sau:
⊛ Lời giải:
Xét (*) ta có: $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{3\sqrt{1-x}-3}{2\sqrt{1-x}-3}$
Do đó đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{3t-3}{2t-3}$
Thay vào (**) ta biến đổi thành

$$t(t-1)(2t^2-4t+3)=0\Leftrightarrow t\in\{0;1\}$$

Từ đó suy ra $x\in\{0;1\}$. □

Ta xét tiếp ví dụ sau:

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải

Ta thấy $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ nên đặt $u=\sqrt[3]{x+1}; v=\sqrt[3]{x+2}$ để có phương trình

$$u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0$$

Từ đó tìm được nghiệm $x\in\{0;-1\}$. □

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2})=1$

Giải

⊛ Ý tưởng: Với hướng đi như bài 2, ta chọn ẩn mới là $\sqrt[3]{x+1}=a; -\sqrt[3]{x+2}=b$. Việc còn lại là phân tích VP theo a,b. Dễ thấy $1=(x+2)-(x+1)$ nên ta có lời giải sau:
⊛ Lời giải:
Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)-(x+2)+\sqrt[3]{x^2+3x+2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2})=0$$

Đặt $\sqrt[3]{x+1}=a; b=-\sqrt[3]{x+2}$ ta có phương trình

$$a^3+b^3-ab(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=\pm b$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\pm\sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\frac{3}{2}$. □

Chúng ta cũng có bài toán tương tự:

Bài 4: Giải phương trình $(x+2)(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1})+\sqrt{2x^2+5x+3}-1=0$

Giải

ĐKXĐ: $x\geqslant -1$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x+3}=a\\ \sqrt{x+1}=b\\ a;b\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+2=a^2-b^2\\ \sqrt{2x^2+5x+3}=ab\\ 1=a^2-2b^2\end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$(a^2-b^2)(a-2b)+ab=a^2-2b^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-2b)+b(a+b)-(a^2-b^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a-2b)-(a-2b)=0 \text{ (do } a+b>0)$$
$$\Leftrightarrow (a-2b)(a-b-1)=0$$

- Với $a=b+1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x+1}+1$ (vô nghiệm)
- Với$a=2b \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ (chọn)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. □

Bài 5: Giải phương trình $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$

Giải

Thoạt nhìn ta đưa ra đánh giá $2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}=4$ nên ta đặt $\sqrt{2+\sqrt{x}}=a; \sqrt{2-\sqrt{x}}=b$

Suy ra (∗) $\begin{cases} a \geqslant b \geqslant 0 \\ ab=\sqrt{4-x} \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$

Ta viết lại phương trình như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{\sqrt{2}+a}+\frac{b^2}{\sqrt{2}-b}=\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow a^2\sqrt{2}-a^2b+b^2\sqrt{2}+ab^2=\sqrt{2}(2-b\sqrt{2}+a\sqrt{2}-ab)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}(a^2+b^2+ab-2)-ab(a-b)=2(a-b)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}(ab+2)=(a-b)(ab+2)\\
&\Leftrightarrow a-b=\sqrt{2}\ (\text{do } a,b\geqslant 0 \Rightarrow ab+2>0)
\end{aligned}$$

Kết hợp (*) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a-b=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow ab=1 \Leftrightarrow \sqrt{4-x}=1 \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$. □

Bài 6: Giải phương trình $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

Giải

⊛ Nhận xét: Dễ thấy rằng $(2x-3)(5-2x)=16x-4x^2-15$, nhưng còn các nhị thức ở ngoài căn ta không thể biểu diễn hết theo một ẩn phụ được, do đó ta đặt hai ẩn phụ và cố đưa về phương trình tích.

⊛ Lời giải:

ĐK $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x-3} \\ v=\sqrt{5-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=2 \\ uv=\sqrt{16x-4x^2-15} \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&(2v^2+3)u+(2u^2+3)v=2+8uv=u^2+v^2+8uv\\
&\Leftrightarrow 2uv(u+v)+3(u+v)=(u+v)^2+6uv\\
&\Leftrightarrow (u+v-3)(2uv-u-v)=0
\end{aligned}$$

- Nếu $u+v=3 :\Leftrightarrow \sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}$ (vô nghiệm)
- Nếu $u+v=2uv :\Leftrightarrow \sqrt{16x-4x^2-15}=1 \Leftrightarrow x=2$ (chọn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Bài 7: Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$ (∗)

Giải

ĐXKĐ: $x \geqslant -1$
Đặt $\sqrt{x+1} = t; t \geqslant 0$ ta có phương trình

$$\Leftrightarrow (t^2-1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2+t-1) = 0$$

• Với $t = 0$ thì $x = -1$.
• Với $t = 1$ thì $x = 0$.
• Với $t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
Phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 0; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\}$. □

Bài 8: Giải phương trình $x^4 + \sqrt{x^2+3} = 3$

Giải

Đặt $x^2 = a, a \geqslant 0$ ta có $a^2 + \sqrt{a+3} = 3$ (∗), ta sẽ đưa về phương trình tích như sau:

$(*) \Leftrightarrow a^2-(a+3)+(a+\sqrt{a+3}) = 0 \Leftrightarrow (a+\sqrt{a+3})(a-\sqrt{a+3}+1) = 0 \Leftrightarrow a+1 = \sqrt{a+3}$ (do $a > 0$)

Từ đó tìm được $a = 1$, suy ra $x = \pm 1$ là nghiệm của phương trình. □

Bài 9: Giải phương trình $(x^2+2)^2 + 4(x+1)^3 + \sqrt{x^2+2x+5} = (2x-1)^2 + 2$ (∗)

Giải

⊛ Nhận xét: Bài này có lũy thừa bậc cao nhất là 4, và có cả căn bậc 2 nên ta sẽ cố nhóm các biểu thức lũy thừa giống trong căn để có thể đặt ẩn phụ.
⊛ Lời giải:

$$(*) \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 + 4(x^3+3x^2+3x+1) + \sqrt{x^2+2x+5} = 4x^2 - 4x + 3$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2 + 8(x^2+2x) + \sqrt{x^2+2x+5} + 5 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x+5} \Rightarrow \begin{cases} t \geqslant 2 \\ t^2 - 5 = x^2 + 2x \end{cases}$
Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$(t^2-5)^2 + 8(t^2-5) + t + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+2t+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 2 \text{ (do } t \geqslant 2 \Rightarrow t^3+2t^2+2t+5 > 0)$$

Suy ra $\sqrt{x^2+2x+5}=2 \Leftrightarrow x=-1$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$. □

Bài 10: Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 1$
Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\sqrt{(x-1)^2+4}=2-\sqrt{x-1}$$

Đặt $t=\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ t^2=x-1 \end{cases}$
Ta có phương trình

$$\sqrt{t^4+4}=2-t\ (t \leqslant 2) \Leftrightarrow t^4-t^2+4t=0 \Leftrightarrow t=0\ (\text{do } t \in [0;2])$$

Từ đó suy ra $x=1$ là nghiệm của phương trình. □

Bài 11: Giải phương trình với tham số $y \leqslant \frac{5}{2}$: $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

Giải

Đặt $a=2x$ và $b=\sqrt{5-2y}$ $(b \geqslant 0)$ ta có phương trình viết lại thành

$$\frac{a^3+a}{2}+\frac{-(b^3+b)}{2}=0 \Leftrightarrow a=b$$

Hay

$$2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow x=\frac{5-4y^2}{2}$$

Vậy $x=\dfrac{5-4y^2}{2}$ là nghiệm của phương trình. □
⊛ Nhận xét: Câu hỏi đặt ra là: Làm sao có thể đặt ẩn phụ như trên?
Trước tiên ta đặt

$$\sqrt{5-2y}=b \Rightarrow y-3=\frac{5-b^2}{2}-3=\frac{-(b^2+1)}{2} \Rightarrow (y-3)\sqrt{5-2y}=\frac{-(b^2+1)\,b}{2}$$

Ta hi vọng có

$$\begin{aligned}&\left(4x^2+1\right)x=\frac{a\left(a^3+1\right)}{2}\\ &\Leftrightarrow \left(4x^2+1\right).2x=a^3+a\\ &\Leftrightarrow 8x^3+2x=a^3+a \Leftrightarrow a=2x\end{aligned}$$

Vấn đề này sẽ được đề cập kĩ hơn trong chương Sáng tạo phương trình - hệ phương trình.

Bài 12: Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}}-1=\sqrt[3]{3(x-3)^2}+\sqrt[3]{9(x-3)}$

Giải

Điều kiện $x \geqslant -2$

Đặt $t = \sqrt[3]{9(x-3)}$ thì ta có $\begin{cases} x = \dfrac{t^3+27}{9} \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{2}} = \sqrt{\dfrac{t^3+45}{18}} \\ \sqrt[3]{3(x-3)^2} = \dfrac{t^2}{3} \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{t^3+45}{18}} - 1 = \frac{t^2}{3} + t \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t^3+45}{2}} = t^2 + 3t + 3 \ (1)$$

Ta có $t^2 + 3t + 3 = \left(t + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên phương trình (1) tương đương với

$$\begin{aligned} &\frac{t^3+45}{2} = (t^2+3t+3)^2 \\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 11t^3 + 30t^2 + 36t - 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2t-1)(t+3)(t^2+3t+9) = 0 \Leftrightarrow t \in \{\frac{1}{2}; -3\} \end{aligned}$$

- Với $t = \dfrac{1}{2}$ thì $x = \dfrac{t^3+27}{9} = \dfrac{217}{72}$
- Với $t = -3$ thì $x = \dfrac{t^3+27}{9} = 0$

Các nghiệm trên thỏa mãn điều kiện của bài toán.
Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{217}{72}$. □

Bài 13: Giải phương trình $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}} + 3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}} = 8$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$5\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} + 3\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}} = 8 \Leftrightarrow 5\sqrt[15]{x^6} + 3\sqrt[15]{x^4} = 8$$

Đặt:$y = \sqrt[15]{x^2}$ với $y \geqslant 0$ ta có:

$$5y^3 + 3y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(5y^2+8y+8) = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Do đó ta có $\sqrt[15]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:$S = \{-1; 1\}$. □

Bài 14: Giải phương trình $\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{6}{x} = 0$

Giải

ĐK $x \neq 0$. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[5]{x^4} - \frac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^5}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^9} - 7\sqrt[5]{x^3} + 6 = 0\ (*)$$

Đặt:$y = \sqrt[5]{x^3}$, $y \neq 0$, phương trình (*) trở thành:

$$y^3 - 7y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+y-6) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \\ y = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{x^3} = 1 \\ \sqrt[5]{x^3} = 2 \\ \sqrt[5]{x^3} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2\sqrt[3]{4} \\ x = -3\sqrt[3]{9} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{1; 2\sqrt[3]{4}; -3\sqrt[3]{9}\right\}$. □

Bài 15: Giải phương trình $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

Giải

ĐK $\begin{cases} 4x - 1 \geqslant 0 \\ 4x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$

Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta có:

$$(4x-1) + (4x^2-1) + 2\sqrt{(4x-1)(4x^2-1)} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-1)(4x^2-1)} = 3 - 4x^2 - 4x = 4 - (2x+1)^2\ (*)$$

Đặt $y = 2x + 1 \Rightarrow 4x - 1 = 2y - 3,\ \ 4x^2 - 1 = y^2 - 2y$

Phương trình (*) trở thành:

$$2\sqrt{(2y-3)(y-2)} = 4 - y^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - y^2 \geqslant 0 \\ 4(2y-3)(y-2)y = (4-y^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} y - 2 = 0 \\ 4(2y-3)y = (y+2)^2(y-2) \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y^3 - 6y^2 + 8y - 8 = 0 \text{ (vô nghiệm trên } [-2; 2]) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$$

Do đó ta có $2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$. □

Bài 16: Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant \dfrac{1}{2}$

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \geqslant 0 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương

$$t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{2}-1 \\ t = -\sqrt{2}-1 \text{ (loại do } t \geqslant 0) \end{array}\right.$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x = 1$

• Với $t = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{2}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 2-\sqrt{2}\}$. □

⊛ Nhận xét: Đối với những bài có dạng $\sqrt{ax+b} + cx^2 + dx + e = 0$ thì cách giải là đặt $\sqrt{ax+b} = t$, sau đó đưa về phương trình bậc 4, dùng đồng nhất thức để phân tích nhân tử. Nhưng có một số bài không giải được bằng cách đó, ta sẽ nhắc lại vấn đề này ở phần sau.

Bài 17: Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy trong căn có $\sqrt{x-1}$, nên ta sẽ cố gắng thêm bớt và tách sẽ được một phương trình theo ẩn mới.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $x \geqslant 1$. Đặt $\sqrt{x-1} = t \geqslant 0$

Ta biến đổi phương trình như sau :

$$\begin{aligned} &[(x-1)-1]\sqrt{x-1} - \sqrt{2}[(x-1)-\sqrt{2}] - \sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}t^2 - t + 2 - \sqrt{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1-\sqrt{2})(t^2 - t - \sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

• Với $t = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow x = 4-2\sqrt{2}$

• Với $t^2 - t - \sqrt{2} = 0$, do $t > 0$ ta chọn $t = \dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow x = \left(\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + 1$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S = \left\{4-2\sqrt{2}; \left(\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right)^2\right\}$. □

Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Bài 18: Giải phương trình $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đối với bài toán này đầu tiên ta phân tích nhân tử trong căn $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ rồi biến đổi vế trái thành tổng hoặc hiệu của hai thừa số trong căn.

⊛ Lời giải:
Viết lại phương trình dưới dạng

$$2(x^2+2)=2(x^2-x+1)+2(x+1)$$

Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=a; \sqrt{x+1}=b$ ta có phương trình $2a^2+2b^2=5ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=\dfrac{b}{2} \end{array}\right.$

Từ đó tìm được nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. □

Bài 19: Giải phương trình $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 5$.
Đầu tiên bình phương hai vế của phương trình:

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}\ (*)$$

Ta không thể tìm được hai số α, β sao cho

$$\alpha(x^2-x-20)+\beta(x+1)=2x^2-5x+2$$

Nên không thể đặt $a=\sqrt{x^2-x-20}; b=\sqrt{x+1}$ như các ví dụ trên được.
Ở bài này, chú ý rằng $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$ và $(*) \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$
Như vậy ta sẽ tìm α, β thỏa $\alpha(x^2-4x-5)+\beta(x+4)=2x^2-5x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=3 \end{cases}$

⊛ Lời giải:
Ta biến đối lại phương trình như sau
$(*) \Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$
Đặt $a=\sqrt{x^2-4x-5}; b=\sqrt{x+4}$ ta có phương trình

$$2a^2+3b^2=5ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=\dfrac{3b}{2} \end{array}\right.$$

• Với $a=b \Rightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}(x \geqslant 5)$
• Với $a=\dfrac{3}{2}b \Rightarrow x=8; x=-\dfrac{7}{4}$
Đối chiều với điều kiện ta nhận $x=8; x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$ là nghiệm của phương trình.□
⊛ Nhận xét: Ta cũng có bài toán tương tự:

Bài 19*: Giải phương trình $3x^2-2x-2=\dfrac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$

Sau đây là một ví dụ khó hơn:

Bài 20: Giải phương trình $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

Giải

⊛ Lời giải: ĐK $x \geqslant 2$
Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=a; \sqrt{x-2}=b$ với $a,b \geqslant 0$
Ta biểu diễn các biểu thức ngoài căn theo a và b như sau:

$$\begin{cases} x^2-6x+11=\alpha(\sqrt{x^2-x+1})^2+\beta(\sqrt{x-2})^2 \\ x^2-4x+7=\alpha(\sqrt{x^2-x+1})^2+\beta(\sqrt{x-2})^2 \end{cases}$$

Sử dụng đồng nhất thức ta giải được $\begin{cases} x^2-6x+11=a^2-5b^2 \\ x^2-4x+7=a^2-3b^2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &(a^2-5b)a=2(a^2-3b^2)b \\ &\Leftrightarrow a^3-2a^2b-5ab^2+6b^3=0 \\ &\Leftrightarrow t^3-2t^2-5t+6=0 \text{ với } t=\frac{a}{b} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(t+2)=0 \end{aligned}$$

• Với $t=1 \Rightarrow a=b \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x-2}$ (VN)
• Với $t=3 \Rightarrow a=2b \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}=3\sqrt{x-2} \Rightarrow x=5 \pm \sqrt{6}$ (chọn)
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{5+\sqrt{6}; 5-\sqrt{6}\right\}$ □

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1/ $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$
2/ $3\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x-3}-\sqrt{11x^2+25x+2}=0$
3/ $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$ 4/$2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$
5/$2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$
6/$10\sqrt{x^3+8}=3(x^2-x+6)$
7/$10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2)$
8/$4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$
9/$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$
10/$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(1-\sqrt{x^2-x-2})=3$
11/$\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1-x}=1+(1-x)\sqrt{x}$
12/$\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4$

Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Đối với nhiều phương trình vô tỷ, khi không biểu diễn hoàn toàn được theo ẩn phụ thì có một cách là xem biến mới là ẩn, biến cũ là tham số. Dạng toán này gọi là ẩn phụ không hoàn toàn.
Nội dung phương pháp:
Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai với ẩn là ẩn phụ hay là ẩn của phương

trình đã cho.
Đưa phương trình về dạng $\sqrt{f(x)}Q(x) = f(x) + P(x)x$ khi đó:
Đặt $\sqrt{f(x)} = t; t \geqslant 0$. Phương trình viết lại thành $t^2 - t.Q(x) + P(x) = 0$
Đến đây chúng ta giải t theo x. Cuối cùng là giải quyết phương trình $\sqrt{f(x)} = t$ sau khi đã đơn giản hóa và kết luận.

Ta xét ví dụ sau để hiểu rõ hơn.

Bài 21: Giải phương trình $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$

Giải

Ta thấy trong căn có x^2+1, ta đặt $t = \sqrt{x^2+1}$. Ta sẽ không rút x theo t mà coi x là tham số. Thật vậy, phương trình đã cho tương đương

$$t^2 - (x+3)t + 3x = 0$$

Phương trình trên có $\Delta = (x+3)^2 - 12x = (x-3)^2$ nên có nghiệm $t = 3;\ t = x+3$
• Nếu $t = x+3$: hệ đã cho vô nghiệm.
• Nếu $t = 3 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$ □

Bài 22: Giải phương trình $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$

Giải

Phương trình tương đương với

$$x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 - (x+2)\sqrt{x^2+2} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2}$ $(t \geqslant \sqrt{2})$, phương trình viết lại thành

$$t^2 - (x+2)\,t + 3x - 3 = 0$$

Ta có $\Delta = (x-4)^2$ nên phương trình có 2 nghiệm là
• $t = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ -2x - 1 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)
• $t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 14 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{14}$
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \sqrt{14}$ và $x = -\sqrt{14}$ □

Bài 23: Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

Giải

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 1}$ $(t \geqslant 0)$
Phương trình viết lại thành

$$2t^2 - (3x+1)t + x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Ta có $\Delta = (x-3)^2$ suy ra phương trình có hai nghiệm là

• $t = 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

• $t = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$

Vậy $S = \{-1; 5; 1\}$ □

⊛ Nhận xét: Thông thường sau khi đặt ẩn phụ thì ta viết phương trình đã cho lại thành $t^2 - (3x+1)\,t + 3x^2 + \frac{3}{2}x - 2$, nhưng bài toán này lại có sự khác biệt là ta sẽ viết phương trình này lại thành $2t^2 - (3x+1)\,t + x^2 + \frac{3}{2}x - 1$. Chúng ta quan tâm tới liệu hệ số trước t^2 có "đẹp" tức ta mong muốn Δ phải là bình phương của một số hoặc một biểu thức, vì điều này sẽ quyết định tới lời giải sẽ ngắn gọn hay phức tạp. Để có thể điều chỉnh được hệ số trước t^2 sao cho Δ đẹp các bạn có thể làm như sau:
Xét phương trình

$$mt^2 - (3x+1)\,t + (5-2m)\,x^2 + \frac{3}{2}x + m - 3 = 0 \text{ có}$$

Phương trình trên có Δ là

$$\Delta = (3x+1)^2 - 4m\left[(5-2m)\,x^2 + \frac{3}{2}x + m - 3\right] =$$
$$\left(8m^2 - 20m + 9\right)x^2 + (6-6m)\,x + \left(-4m^2 + 12m + 1\right)$$

Ta xét tiếp Δ của Δ bằng cách giải phương trình sau:

$$2\sqrt{(8m^2 - 20m + 9)\,(-4m^2 + 12m + 1)} = 6 - 6m$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

Đó chính là hệ số mà ta cần tìm.

Bài 24: Giải phương trình $3\left(\sqrt{2x^2+1} - 1\right) = x\left(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Giải

Phương trình tương đương với

$$3\left(\sqrt{2x^2+1} - 1\right) = x\left(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1}\right) \Leftrightarrow 3x^2 + x + 3 + (8x-3)\sqrt{2x^2+1} = 0$$

Đặt $\sqrt{2x^2+1} = t$ $(t \geqslant 1)$ ta có phương trình

$$3t^2 + (8x-2)\,t - 3x^2 - x = 0 \ (*)$$

Có $\Delta = (10x-3)^2$ nên nghiệm của (*) là $t_1 = x; t_2 = 1-3x$

• Nếu $t = x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2x^2+1 = \dfrac{x^2}{9} \end{cases}$ (vô nghiệm)

• Nếu $t = 1-3x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = 1 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{3} \\ 7x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$. □

Bài 25: Giải phương trình $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$

Giải

ĐKXĐ: $|x| \leqslant 2$

Bình phương 2 vế ta có

$$4(2x+4) + 16\sqrt{2(4-x^2)} + 16(2-x) = 9x^2 + 16 \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} = x^2 + 8x$$

Ta thấy cả hai vế có dạng hằng đẳng thức, và cố đưa về $A^2 = B^2$. Để làm điều đó ta sẽ thêm 16 vào 2 vế để được $(2\sqrt{2(4-x^2)} + 4)^2 = (x+4)^2$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} = x^2 + 8x$$

Đặt $t = \sqrt{2(4-x^2)}$ ta có phương trình

$$4t^2 + 16t - x^2 - 8x = 0$$

Giải phương trình trên theo ẩn t ta được $t_1 = \dfrac{x}{2}; t_2 = \dfrac{-x}{2} - 4$

Vì $|x| \leqslant 2$ nên t_2 không thỏa điều kiện.

Với $t = \dfrac{x}{2}$ thì $\sqrt{2(4-x^2)} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (thoả $|x| \leqslant 2$)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. □

Bài 26: Giải phương trình $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6$

Giải

Điều kiện $x \geqslant \dfrac{3}{2}$

Đặt $t = \sqrt{2x-3}; t \geqslant 0 \Rightarrow t^2 + 3 = 2x$

Ta sẽ thêm bớt theo ẩn phụ để đưa về phương trình theo t và x là tham số.

Phương trình đã cho tương đương

$$t^2 - (3x+2)t + 2x^2 + x - 3 = 0 \ (*)$$

(*) có $\Delta = 9x^2 + 12x + 4 - 4(2x^2 + x - 3) = (x+4)^2$ nên có nghiệm $t = 2x+3$ hoặc $t = x-1$

• Với $t = 2x+3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 2x+3$ (vô nghiệm)

• Với $t = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = x-1 \Leftrightarrow x = 2$ (chọn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Bài 27: Giải phương trình $4\sqrt{x+1} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$

Giải

ĐKXĐ: $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Đặt $\sqrt{1-x} = t$ ta có phương trình

$$3t^2 - (2 + \sqrt{1-x})t + 4(\sqrt{x+1} - 1) = 0 \ (*)$$

(*) có $\Delta = (2 + \sqrt{1-x})^2 - 48(\sqrt{x+1} - 1)$ không có dạng bình phương phương nên không thể làm như thường. Ở đây, lưu ý rằng có thể phân tích $3x$ theo $1-x$ và $1+x$ nên ta sẽ tìm cách phân tích thích hợp để Δ là bình phương:
Ta sẽ tìm α và β sao cho

$$3x + 1 = \alpha(\sqrt{1-x})^2 + \beta(\sqrt{1+x})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Như vậy viết lại (*) dưới dạng

$$t^2 - (2 + \sqrt{x+1})t - 2(x+1) + 4\sqrt{x+1} = 0 \ (**)$$

(**) có $\Delta = 9x + 13 - 12\sqrt{x+1} = 9(x+1) - 12\sqrt{x+1} + 4 = (3\sqrt{x+1} - 2)^2$
Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm $x \in \left\{-\dfrac{3}{5}; 0\right\}$. □
⊛ Nhận xét: Vấn đề ở đây là phải tinh ý tách $3x$ thành hai dạng có biểu thức như trong căn, đến đấy bài toán mới thực sự được giải quyết.

Bài 28: Giải phương trình $2(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^4} = 3x^2 + 1$

Giải

⊛ Lời giải: Điều kiện $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Đặt $a = \sqrt{1+x^2}; b = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 3x^2 + 1 = 2(1+x^2) - (1-x^2) = 2a^2 - b^2$
Khi đó phương trình trở thành

$$2(2a - b) - ab = 2a^2 - b^2 \Leftrightarrow 2a^2 + a(b-4) + 2b - b^2 = 0 \ (*)$$

(*)c ó $\Delta_a = (b-4)^2 - 8(2b - b^2) = (3b-4)^2$ nên suy ra $a = \dfrac{b}{2}$ hoặc $a = 2 - b$
• Với $a = \dfrac{b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1-x^2}$ (vô nghiệm)
• Với $a = 2 - b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2 - \sqrt{1-x^2}$
Giải phương trình này tìm được $x = 0$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$. □

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1/$6x^2 - 10x + 5 - (4x-1)\sqrt{6x^2 - 6x + 5} = 0$
2/$(x+3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$ (ĐH Dược-1999)
3/$2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 2x - 1$ (ĐH Dược 1997)

4/$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$
5/$2(1-x)\sqrt{x^2+x+1}=x^2-3x-1$
6/$(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ (Chú ý thêm bớt để có Δ chính phương).
7/$(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

Phương pháp sử dụng hệ số bất định

Bài 29: Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$

Giải

Ta cần tìm a,b,c sao cho:

$$2x^2-11x+21=a(4x-4)^2+b(4x-4)+c$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-11x+21=16ax^2+(4b-32a)x+(16a-4b+c)$$

Đồng nhất hệ số ta thu được $a=\dfrac{1}{8};b=-\dfrac{7}{4};c=12$
Ta viết lại PT như sau:

$$\frac{1}{8}(4x-4)^2-\frac{7}{4}(4x-4)+12-\sqrt[3]{4x-4}=0$$

Đặt $u=\sqrt[3]{4x-4}$, khi đó PT trở thành

$$u^6-14u^3-24u+96=0\Leftrightarrow(u-2)^2(u^4+4u^3+18u+24)=0$$

Dễ thấy $u^4+4y^3+18u+24=0$ vô nghiệm vì:
• Nếu $u\leqslant 0$ thì $u^6-14u^3-24u+96>0$
• Nếu $u>0$ thì $u^4+4u^3+18u+24>0$
Vậy $u=2$, từ đó tìm được $x=3$. □

Bài 30: Giải phương trình $2\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-x^2}=3-x$

Giải

ĐK $-1\leqslant x\leqslant 1$
Ta tìm $\alpha;\beta$ sao cho $-x+3=\alpha(\sqrt{1-x})^2+\beta(\sqrt{x+1})^2$
$\Leftrightarrow -x+3=(\beta-\alpha)x+\alpha+\beta$
Giải ra ta được $\alpha=2;\beta=1$
Ta viết lại phương trình thành $1+x+2(1-x)-2\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}-3\sqrt{1-x^2}=0$
Đặt $u=\sqrt{1+x};v=\sqrt{1-x}$ và $u,v\geqslant 0$, phương trình trở thành

$$u^2+2v^2-2v+u-3uv=0\Leftrightarrow u^2+(1-3v)u+2v^2-2v=0$$

Phương trình trên có $\Delta = (1-3v)^2 - 4(2v^2-2v) = (v+1)^2$ nên $u = 2v$ hoặc $u = v - 1$

• $u = 2v \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

• $u = v - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2 = 3 \end{cases}$

Nên phương trình có 2 nghiệm $x = \dfrac{5}{3}; x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{5}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ □

Bài 31: Giải phương trình $4\sqrt{1-x} = x + 6 - 3\sqrt{1-x^2} + 5\sqrt{1+x}$

Giải

Đặt $a = \sqrt{1+x}$ và $b = \sqrt{1-x}$

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 2x + 2 + 1 - x + 5\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x} + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2a^2 + b^2 - 3ab + 5a - 4b + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow (a-b)(2a-b) + 3(a-b) + (2a-b) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow (a-b+1)(2a-b+3) = 0 \end{aligned}$$

• Nếu $a + 1 = b$:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = -(2x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

• Nếu $2a + 3 = b$ ta suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ tương tự sau xin dành cho bạn đọc:

Bài 32: Giải phương trình $4 + 2\sqrt{1-x} = -3x + 5\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2}$

Đáp số: Phương trình có 3 nghiệm $S = \left\{0; \dfrac{24}{25}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ □

Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Dạng 1: Phương trình có dạng $x^n + a = b\sqrt[n]{bx-a}$

Cách giải: Đặt $y = \sqrt[n]{bx-a}$ khi đó ta có hệ đối xứng loại II

$$\begin{cases} x^n - by + a = 0 \\ y^n - bx + a = 0 \end{cases}$$

Ta xét bài toán sau:

Bài 33: Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow y^3 = 2x - 1$

Ta có hệ PT sau $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại II, trừ vế theo vế ta có:

$$x^3 - y^3 = 2(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0$$

$x = y \Rightarrow \sqrt[3]{2x-1} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$

Vậy $x = 1; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ta có $x^2 + y^2 + xy + 2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 2 > 0, \forall x, y$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. □

Dạng 2: Phương trình có dạng

$$\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[m]{b + f(x)} = c$$

Cách giải: Đặt $u = \sqrt[n]{a - f(x)}; v = \sqrt[m]{b + f(x)}$

Ta có hệ sau

$$\begin{cases} u + v = c \\ u^n + v^m = a + b \end{cases}$$

Bài 34: Giải phương trình $\sqrt[4]{x+8} + \sqrt[4]{x-7} = 3$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 7$

Đặt $u = \sqrt[4]{x+8} \geqslant 0 \Leftrightarrow u^4 = x + 8 \Rightarrow x = u^4 - 8$

$v = \sqrt[4]{x-7} \geqslant 0 \Rightarrow v^4 = x - 7 \Rightarrow x = v^4 + 7$

Ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u, v \geqslant 0 \\ u^4 - v^4 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) = 15 \\ u, v \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) = 15 \\ u, v \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 0 \leqslant u \leqslant 3 \\ (u - v)(u^2 + v^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 3 \\ (2u - 3)\left[u^2 + (3 - u)^2\right] = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 3 \\ (2u - 3)(2u^2 - 6u + 9) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 3 \\ 4u^3 - 18u^2 + 36u - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 3 \\ u = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $\begin{cases}\sqrt[4]{x+8}=2\\ \sqrt[4]{x-7}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+8=16\\ x-7=1\end{cases} \Leftrightarrow x=8$ (thoả ĐKXĐ)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$. □

Bài 35: Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}=8$

Giải

Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2}; v=\sqrt{6-5x}\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases}u^3=3x-2\\ v^2=6-5x\end{cases}$

$\Rightarrow 5u^3+3v^2=5(3x-2)+3(6-5x)=8(1)$

Mặt khác ta lại có $2u+3v-8=0(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ sau:

$$\begin{cases}5u^3+3v^2=8\\ 2u+3v=8\end{cases} \Rightarrow 5u^3+3\left(\frac{8-2u}{3}\right)^2=8 \Leftrightarrow 15u^3+4u^2-32u+40=0$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $u=-2$ nên $\sqrt[3]{3x-2}=-2 \Rightarrow x=-2$□

Bài 36: Giải phương trình

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$$

Giải

ĐK $-1\leqslant x\leqslant 1$

Đặt $\sqrt{1+x}=a; \sqrt{1-x}=b$ với $a,b\geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2=2$

Ta có hệ sau

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\ (1)\\ \sqrt{1+ab}(a^3-b^3)=2+ab\ (2)\end{cases}$$

Ta có

$$(1)\Rightarrow (a+b)^2=2+2ab \Rightarrow \sqrt{1+ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\ (\text{do } a,b\geqslant 0)$$

Kết hợp (2) ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)(a-b)(a^2+b^2+ab)=2+ab \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2-b^2)=1$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases}a^2-b^2=\sqrt{2}\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

Cộng hai phương trình vế theo vế ta có

$$2a^2=2+\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2=1+\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1+x=1+\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

Bài 37: Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1}+1 = \sqrt[3]{3x+4}$

Giải

⊛ ĐK $x \geqslant -1$
Đặt $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt[3]{3x+4} \Rightarrow x = a^2 - 1$ và $3a^2 + 1 = b^3$
Thay vào phương trình ta có hệ sau

$$\begin{cases} (a^2+4)a+1 = b \\ 3a^2+1 = b^3 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta có

$$a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = b^3 + b \Leftrightarrow (a+1)^3 + (a+1) = b^3 + b \ (*)$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = t^3 + t$
Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, vậy hàm số đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow a+1 = b$
Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} a+1 = b \\ b^3 - 3a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ b^3 - 3a^2 = 1 \end{cases}$$

Sử dụng phép thế ta có

$$b^3 - 3(b-1)^2 = 1 \Leftrightarrow b^3 - 3b^2 + 6b - 4 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2 - b + 4) = 0$$

Suy ra $b = 1$, từ đó $x = -1$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$. □

Dạng 3: Phương trình dạng $\sqrt{ax+b} = cx^2 + dx + e$
Ta đã gặp các dạng bài toán như $\sqrt{ax+b} = cx + d$ và một số ví dụ đã nêu ở trên bằng cách bình phương bậc 4 và đồng nhất hệ số để tìm được nghiệm, nhưng đối với những bài toán không dùng được phương pháp đó thì sao? Chúng ta cùng làm rõ vấn đề.
Xét ví dụ sau:

Bài 38: Giải phương trình $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

Giải

⊛ Lời giải: ĐK $x \geqslant -\dfrac{5}{4}$
Ta biến đổi phương trình như sau

$$4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$$

.Đặt $2y - 3 = \sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 4y+5 \\ (2y-3)^2 = 4x+5 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-y)(x+y-1)=0$

Với $x=y \Rightarrow 2x-3=\sqrt{4x+5} \Rightarrow x=2+\sqrt{3}$.

Với $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{2}$□

⊛ Nhận xét:

Bài toán tổng quát có dạng như sau

$$\sqrt{ax+b}=cx^2+dx+e,(a\neq 0,c\neq 0,a\neq \frac{1}{c})$$

Xét $f(x)=cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x)=2cx+d$

Giải phương trình $f'(x)=0$, khi đó bằng phép đặt $\sqrt{ax+b}=2cy+d$, ta sẽ đưa được về hệ đối xứng loại II (trừ một số trường hợp đặc biệt).

Ta xét ví dụ tiếp theo

Bài 39: Giải phương trình $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Xét $f(x)=x^2-4x-3$ có $f'(x)=2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$. Vậy đặt $\sqrt{x+5}=y-2$.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $x\geqslant -5$

Viết lại phương trình đầu dưới dạng

$$\sqrt{x+5}=(x-2)^2-7\ (*)$$

Đặt $\sqrt{x+5}=y-2 \Rightarrow (y-2)^2=x+5$. Thay vào (*) ta có

$$\begin{cases}(x-2)^2=y+5\\(y-2)^2=x+5\end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta có

$$(x-y)(x+y-3)=0$$

• Nếu $x=y \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\\ x=\frac{1}{2}(5-\sqrt{29})\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ (thoả $x\geqslant -5$)

• Nếu $x+y=3 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leqslant 1\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ (thoả $x\geqslant -5$)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-1;\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\right\}$. □

Bài 40: Giải phương trình $x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5$ và đặt $f(x) = -4x^2 + 13x - 5$

Có $f'(x) = -8x + 13$ nhưng nếu ta giải ra và đặt bằng phương pháp tương tự sẽ không thu được hệ đối xứng loại II. Vậy ta hi vọng tìm hướng đi khác, và một phương pháp tự nhiên là hệ số bất định.

⊛ Lời giải:

ĐK $x \geqslant -\dfrac{1}{3}$

Đặt $\sqrt{3x+1} = -(2y-3); y \leqslant \dfrac{3}{2}$

Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} (2x-3)^2 = 2y + x + 1 \\ (2y-3)^2 = 3x + 1 \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(2x+2y-5) = 0$

• Với $x = y \Rightarrow x = \dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$

• Với $2x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}; \dfrac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$ □

⊛ Nhận xét: Ta thấy cách giải bài toán này khác so với ví dụ trên vì đưa về hệ "gần đối xứng" loại II nhưng vẫn giải được một cách dễ dàng. Bài toán này có dạng như sau:

$$\sqrt{ax+b} = r(ux+v)^2 + dx + e \text{ trong đó } \begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$$

Cách giải: Đặt $uy + v = \sqrt{ax+b}$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} uy + v = r(ux+v)^2 + dx + e \\ ax + b = (uy+v)^2 \end{cases}$

Ta viết lại phương trình trên như sau $\sqrt{3x+1} + (2x-3)^2 - x - 4 = 0$. Dễ dàng ta kiểm tra được các hệ số đều thỏa mãn, nhưng khi đặt $\sqrt{3x+1} = 2y-3$ thì ta thu được hệ phương trình không dễ dàng để giải một chút nào, do đó chuyển vế và đổi dấu sẽ đưa về hệ gần đối xứng giải được như bài toán trên.

Tổng kết lại, ta có đạo hàm áp dụng được khi hệ số $d = 0$, còn nếu không được thì dùng cách thêm bớt như trên.

Dạng 4: Phương trình dạng $\sqrt{ax+b} = \dfrac{1}{a}x^2 + cx + d (a \neq 0)$ và thỏa mãn $b + ad = \dfrac{a^2c}{2}\left(1 + \dfrac{c}{2}\right)$

Cách giải: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{a}x^2 + cx + d$ có $f'(x) = \dfrac{2}{a}x + c$

Cho $f'(x) = 0$ ta thu được $x = -\dfrac{ac}{2}$. Từ đó đặt $\sqrt{ax+b} = y + \dfrac{ac}{2}$ ta thu được hệ đối xứng loại II.

Bài 41: Giải phương trình $3x^2 + x - \dfrac{29}{6} = \sqrt{\dfrac{12x+61}{36}}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Xét $f(x) = 3x^2 + x - \dfrac{29}{6} \Rightarrow f'(x) = 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$

⊛ Lời giải:

Đặt $\sqrt{\dfrac{12x+61}{36}} = y + \dfrac{1}{6}$ $(y \geqslant -\dfrac{1}{6})$

$\Leftrightarrow \dfrac{12x+61}{36} = y^2 + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow 12x + 61 = 36y^2 + 12y + 1 \Leftrightarrow 3y^2 + y = x + 5$

Mặt khác từ phương trình đầu ta có $3x^2 + x - \dfrac{29}{6} = y + \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 3x^2 + x = y + 5$

Nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 3x^2 + x = y + 5 \\ 3y^2 + y = x + 5 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(3x+3y+2) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee y = -\dfrac{3x+2}{3}$

• Với $x = y \Rightarrow 3y^2 = 5 \Rightarrow x = y = \sqrt{\dfrac{5}{3}}; y \geqslant -\dfrac{1}{6}$

• Với $y = -\dfrac{3x+2}{3} \Rightarrow 3x^2 + x = \dfrac{3x+2}{3} + 5 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 13 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{126}}{9}$

Từ đây tìm được y và kết luận nghiệm □

Bài 42: Giải phương trình $\sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} + \sqrt[4]{x} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Giải

Điều kiện $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} - 1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} = u \\ \sqrt[4]{x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ 0 \leqslant v \leqslant \sqrt[4]{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$

Như vậy ta có hệ $\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ u^2 + v^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - v \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - v\right)^2 + v^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai ta có:

$$(v^2+1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + v\right)^2 \Leftrightarrow v^2 - v + 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}} - 3}}{2} \text{ (chọn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}} - 3}}{2}\right)^4$. □

Bài 43: Giải phương trình $\sqrt{1 - x^2} = \left(\dfrac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 1 - u^4 \\ \left(\dfrac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2 = v^2 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x}$; $v = \dfrac{2}{3} - \sqrt{x}$ với $u \geqslant 0, v \leqslant \dfrac{2}{3}$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ \sqrt{1 - u^4} = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ (u^2 + v^2)^2 - 2u^2.v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ \left[(u + v)^2 - 2u.v\right]^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{4}{9} - 2u.v\right)^2 - 2u^2.v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{2}{3} \\ 2u^2.v^2 - \dfrac{16}{9}u.v - \dfrac{65}{81} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ u.v = \dfrac{8 - \sqrt{194}}{18} \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{5} \\ u.v = \dfrac{8 + \sqrt{194}}{18} \end{cases} \end{array}\right.$$

Nên u, v là nghiệm của phương trình

$$\left[\begin{array}{l} y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{8 - \sqrt{194}}{18} = 0 \\ y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{8 + \sqrt{194}}{18} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được nghiệm duy nhất của phương trình là
$x = \dfrac{1}{9}\left(-2 + \sqrt{2(\sqrt{194} - 6)} + \sqrt{\dfrac{97}{2}}\right)$. □

Bài 44: Giải phương trình $4x^2 - 11x + 10 = (x - 1)\sqrt{2x^2 - 6x + 2}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ngoài cách dùng ẩn phụ không hoàn toàn, ta cũng có thể đưa phương trình về hệ đối xứng loại II.

⊛ Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 + x + 1 = (x - 1)\sqrt{(x - 1)(2x - 3) - x - 1}$$

Đặt $u = 2x - 3$; $v = \sqrt{(x - 1)(2x - 3) - x - 1}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + x + 1 = (x - 1)v \\ v^2 + x + 1 = (x - 1)u \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta có

$$u^2 - v^2 = (x - 1)(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u + v + x - 1) = 0$$

• Nếu $u = v$:

$\Rightarrow u^2 + x + 1 = (x - 1)u \Leftrightarrow (2x - 3)^2 + x + 1 = (x - 1)(2x - 3)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+7=0$ (vô nghiệm)

• Nếu $u+v+x-1=0$:

$\Leftrightarrow 2x-3+\sqrt{2x^2-6x+2}+x-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+2}=4-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \dfrac{4}{3} \\ 7x^2-18x+14=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.□

⊛ Nhận xét: Cách giải của bài toán này xuất phát từ 1 cách làm đã nêu ở trên. Dạng tổng quát là

$$f^n(x)+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$$

Ta dự đoán $f(x)=(2x+c)^2$. Đến đây ta đồng nhất hệ số để tìm c :

$$4x^2+4cx+c^2+(-11-4c)x+10-c^2=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x+c)-(-11-4c)x-10+c^2}$$
$$\Leftrightarrow b=(11-4c)x+10-c^2$$

Đối chiếu với bài toán đồng nhất hệ số suy ra $x=-3$

Phương pháp lượng giác hóa

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ có thể

Đặt $x=|a|\sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x=|a|\cos t$ với $0\leqslant t\leqslant \pi$

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ có thể

Đặt $x=\dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

Hoặc $x=\dfrac{|a|}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2+x^2}$ có thể: Đặt:$x=|a|\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Hoặc $x=|a|\cot t$ với $t\in(0;\pi)$.

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ có thể đặt $x=a\cos 2t$.

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ có thể đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$.

Lợi thế của phương pháp này là đưa phương trình ban đầu về một phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải như phương trình đẳng cấp, đối xứng ... Và điều kiện nhận hoặc loại nghiệm cũng dễ dàng hơn rất nhiều. Vì lượng giác là hàm tuần hoàn nên ta chú ý đặt điều kiện các biểu thức lượng giác sao cho khi khai căn không có dấu trị tuyệt đối, có nghĩa là luôn dương.

Bài 45: Giải phương trình $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

Giải

ĐK $-1\leqslant x\leqslant 1$

Từ điều kiện của bài toán ta đặt ẩn phụ $x=\cos t$, khi đó $\sqrt{1-x^2}=|\sin\varphi|$

Chỉ cần chọn φ mà $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ khi đó $-1 \leqslant cos\varphi = x \leqslant 1$ và $\sin\varphi \geqslant 0$ và $|\sin\varphi| = \sin\varphi$
Phương trình đã cho biến đổi được về dạng

$$cos^3\varphi + \sin^3\varphi = \sqrt{2}cos\varphi sin\varphi \Leftrightarrow (cos\varphi + sin\varphi)(1 - cos\varphi sin\varphi) = \sqrt{2}cos\varphi sin\varphi$$

Đặt $u = cos\varphi + sin\varphi = \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$
Do $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{4}$
$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, ta được $-\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant \sqrt{2}$
Phương trình đại số với ẩn u có dạng

$$\begin{aligned}
&u\left(1 - \frac{u^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{u^2-1}{2} \\
&\Leftrightarrow u^3 + \sqrt{2}u^2 - 3u - \sqrt{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u - \sqrt{2}\right)\left(u^2 + 2\sqrt{2}u + 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -\sqrt{2} + 1 \\ u = -\sqrt{2} - 1 < -\sqrt{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

• Nếu $u = \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, k ∈ Z

• Nếu $u = \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$ và $cos\varphi sin\varphi = \frac{u^2-1}{2} = 1 - \sqrt{2}$

Khi đó $cos\varphi$, $sin\varphi$ là nghiệm của phương trình
$X^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)X + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}$
Do $\sin\varphi \geqslant 0$ cho nên $cos\varphi = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}$
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. □

Bài 46: Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$

Giải

ĐK $x \in [-1; 1]$
Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$
Phương trình tương đương

$$2\cos^2 t + \sqrt{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin t\cos t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin 2t = -\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t - \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2t - \frac{\pi}{4} = -\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + \frac{k4\pi}{3} \\ t = -\frac{\pi}{10} + \frac{k4\pi}{5} \end{array}\right.$$

Dựa vào điều kiện nghiệm của phương trình ta nhận 2 nghiệm là $x = \cos\dfrac{\pi}{2}; x = \cos\dfrac{7\pi}{10}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\cos\dfrac{7\pi}{10}; 0\right\}$ □

Bài 47: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

Giải

ĐKXĐ: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$

Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}} = \sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} = \sin t\,(1+2\cos t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{t}{2} = 0\\ \sin\dfrac{3t}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6}\\ t = \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\\ x = 1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1\right\}$. □

Bài 48: Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq \pm 1\\ x \neq 0\end{cases}$

Đặt $x = \tan t; t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{4}; 0\right\}$

Khi đó ta có:

- $x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos t}$
- $\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{1}{\sin 2t}$
- $\cos 2t = \dfrac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{1-x^2}{x^2+1} \Rightarrow \sin 2t.\cos 2t = \dfrac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$\Leftrightarrow \sin 4t = \dfrac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 4t} = \dfrac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Khi đó phương trình được biến đổi về dạng

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t} \Leftrightarrow 4\sin t.\cos 2t + 2\cos 2t = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t = 1 - \cos 2t \Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t = 2\sin^2 t \Leftrightarrow (\cos 2t - \sin t)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 2\sin^2 t - \sin t\right)\sin t = 0 \Leftrightarrow (\sin t + 1)(2\sin t - 1)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là:$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:

1/ $x^3 - x^2 - 10x - 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$

2/$7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(1 + 3x - 3x^2)}$

3/$8x^2 - 13x + 7 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$

4/$\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

5/$\sqrt{2x + 15} = 32x^2 + 32x - 20$

6/$\sqrt{x - 1} + x^2 - x - 3 = 0$

7/$x^2 - x - 2004\sqrt{1 + 16032x} = 2004$ (HSG Bắc Giang 2003-2004)

8/$\sqrt{9x - 5} = 3x^2 + 2x + 3$

9/$x^2 = \sqrt{2 - x} + 2$ 10/$\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 14$

11/$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$

12/$\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt{x + 1} = 3$

13/$\sqrt[4]{18 - x} + \sqrt[4]{x - 1} = 3$

14/$\sqrt[4]{17 - x^8} - \sqrt[3]{2x^8 - 1} = 1$

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC

Bài 1: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x(x+3)\geqslant 0 \\ x+2\geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+5x+6}{x}\geqslant 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

Phương trình được viết lại thành

$$x\sqrt{\frac{x+3}{x}}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{x+2})(\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x+2}=0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$. □

Bài 2: Giải phương trình

$$\frac{1}{x^2+9x+40}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$$

Giải

ĐKXĐ: $x\notin\{-4;-5;-6;-7\}$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}\Leftrightarrow x^2+11x-26=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-13 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-13;2\}$. □

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{x^2+5x+2}{2(x+1)}$

Giải

ĐKXĐ: $x \neq -1$

Phương trình tương đương với:

$$(x^2+x+2)-(2x+2)\sqrt{x^2+x+2}+4x=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+2}-2x)(\sqrt{x^2+x+2}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=2x\\ \sqrt{x^2+x+2}=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=1;-2$. □

Bài 4: Giải phương trình $x^4-x^2+3x+5-2\sqrt{x+2}=0$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant -2$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x^4-2x^2+1)+(x^2+2x+1)+(x+3-2\sqrt{x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2+(x+1)^2+(\sqrt{x+2}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1=0\\ x+1=0\\ \sqrt{x+2}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$. □

Bài 5: Giải phương trình $x^8-x^5+x^2-x+1=0$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\left(x^4-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+\frac{x^2}{2}=0$$

Từ đó suy ra $x^4-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{x^2}{2}=0$. Hệ này vô nghiệm nên phương trình vô nghiệm. □

Bài 6: Giải phương trình

$$2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=-x^3-2x^2+10x+38$$

Giải

ĐKXĐ: $-1 \leqslant x \leqslant 3$

Phương trình đã cho được viết lại thành:

$$(\sqrt{x+1}-1)^2+(\sqrt{9-x^2}-3)^2+(\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{9-x^2}-3=\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3=0 \Leftrightarrow x=0$$

Từ đó dễ dàng thu được $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □

Bài 7: Giải phương trình $x+y-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+4=2(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1})$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant \frac{1}{2}, y \geqslant \frac{1}{2}$
Phương trình trên tương đương với:

$$(x - \frac{1}{x} + 2 - 2\sqrt{2x+1}) + (y - \frac{1}{y} + 2 - 2\sqrt{2y+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \sqrt{2x-1}\right)^2}{x} + \frac{\left(y - \sqrt{2y-1}\right)^2}{y} = 0 \ (*)$$

Mà $x, y > 0$ nên $VT(*) \geqslant 0$ và (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2x-1} \\ y = \sqrt{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1, 1)$. □

Bài 8: Giải phương trình $2x\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2x^2 + x + 2$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 0$
Phương trình tương đương với

$$\frac{(\sqrt{x+3} - 2x)^2}{2} + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2x = 0 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Bài 9: Giải phương trình $\frac{1}{\left(2x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(3x+1\right)^2} = \frac{3}{\left(x+2\right)^2}$

Giải

ĐKXĐ: $x \notin \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{3}; -2\right\}$
Ta có bổ đề sau, có thể dễ dàng chứng minh bằng cách bình phương 2 vế đẳng thức:
Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$ thì

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$$

Như vậy phương trình đã cho được viết lại thành

$$\frac{1}{\left(2x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(-3x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(x+2\right)^2} = \frac{4}{\left(x+2\right)^2} \ (1)$$

Vì $(2x-1) + (-3x-1) + (x+2) = 0$ nên

$$\sqrt{\frac{1}{\left(2x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(-3x-1\right)^2} + \frac{1}{\left(x+2\right)^2}} = \left|\frac{1}{(2x-1)} + \frac{1}{(-3x-1)} + \frac{1}{(x+2)}\right|$$

Vậy (1) tương đương với

$$\left|\frac{1}{(2x-1)}+\frac{1}{(-3x-1)}+\frac{1}{(x+2)}\right|=\frac{2}{|x+2|}$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{(-3x-1)(x+2)+(2x-1)(x+2)+(2x-1)(-3x-1)}{(2x-1)(-3x-1)(x+2)}\right|=\frac{2}{|x+2|}$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{-7x^2-3x-3}{(2x-1)(-3x-1)}\right|=2\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. □

PHƯƠNG PHÁP DÙNG LƯỢNG LIÊN HỢP

Lý thuyết

Phương pháp lượng liên hợp là một cách giải hiệu quả đối với phương trình, hệ phương trình vô tỉ. Ý tưởng chính của phương pháp là trục căn thức và tạo nhân tử chung. Muốn vậy, ta cần phải biết được nghiệm và biến đổi khéo léo.

1) Dùng máy tính bỏ túi để giải nghiệm của phương trình:

Ví dụ để tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x^2+x+4}=7$:

Đầu tiên ta cần nhập vào máy tính bỏ túi:

$$\sqrt{X^2-X+3}+\sqrt{X^2+X+4}-7$$

Sau đó, bấm Shift → CALC

Sau khi máy tính giải ra nghiệm, ta nhận thấy phương trình trên có nghiệm $X=3$. Để kiểm tra phương trình trên còn sót nghiệm hay không ta tiếp tục nhập:

$$\left[\sqrt{X^2-X+3}+\sqrt{X^2+X+4}-7\right]:(X-3)$$

Rồi lại tiếp tục bấm Shift → Solve. Ta sẽ tìm được nghiệm thứ hai là $X=\dfrac{-143}{48}$.

2) Dùng tính chất số học để đoán nghiệm của phương trình:

Vẫn dùng phương trình trên làm ví dụ, ta nhận xét vế phải của phương trình là 1 số nguyên. Chính vì vậy mà ta đưa ra dự đoán các số trong căn thức phải là số chính phương và bé hơn 7. Vì vậy ta có thể cho mỗi căn thức bằng các số từ 1 → 7 và giải từng vế căn thức.

Ví dụ như:

Cho $\sqrt{x^2-x+3}=1$ và $\sqrt{x^2+x+4}=6$ rồi giải lần lượt từng phương trình. Nhưng nếu cả hai vế đều là căn thức thì phương pháp này sẽ không hiệu quả.

3) Thế thử một vài nghiệm vào phương trình đã cho để đoán nghiệm:

Dựa vào điều kiện của bài toán, ta sẽ lần lượt thế các nghiệm gần gũi như $-3,-2,-1,0,1,2,3$ vào phương trình để tìm xem số nào là nghiệm của phương trình. Đôi khi với một chút nhạy

bén, ta có thể dễ dàng nhẩm ngay nghiệm của phương trình nếu đó là nghiệm đẹp.

Sau đây là một số kĩ thuật dùng phương pháp lượng liên hợp:
Một số hằng đẳng thức hay sử dụng:
1) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
2) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$
3) $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
4) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1})$
....
Sử dụng những hằng đẳng thức này, ta có thể quy phương trình vô tỉ ban đầu về dạng phương trình tích bằng việc làm xuất hiện các nhân tử chung. Từ đó ta có thể dễ dàng giải quyết tiếp.

Ta cũng có một số hằng đẳng thức để trục căn thức:
1) $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}$
2) $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y} = \dfrac{x \pm y}{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$
3) $\sqrt[4]{x} \pm \sqrt[4]{y} = \dfrac{x-y}{(\sqrt[4]{x} \mp \sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

Bài tập ví dụ

KĨ THUẬT THÊM BỚT VÀ TÁCH HẠNG TỬ
Ở phương pháp này, chúng ta sẽ thêm bớt hạng tử hoặc tách hạng tử sẵn có để dùng phương pháp lượng liên hợp để giải phương trình.

Bài 1: Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1 \quad (1.1)$

Giải

Vì $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình trên, ta viết phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{x^2-2x+3} = \frac{x^2+1}{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} - 2 = \frac{x^2-2x-1}{x+1}$$

Vì $\sqrt{x^2-2x+3}+2>0$ nên:

$$(1.1) \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3}+2\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+2} = \frac{x^2-2x-1}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}+2} = \frac{x^2-2x-1}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}+2} = \dfrac{1}{x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}+2} = \dfrac{1}{x+1} \end{array}\right.$$

Dễ thấy phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}+2 = x+1$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{1 - \sqrt{2};\ 1 + \sqrt{2}\right\}$ □

⊛ Nhận xét: mấu chốt của lời giải trên là nhận ra lượng liên hợp để tìm ra nhân tử chung là $\sqrt{x^2-2x+3}+2$. Vậy làm cách nào để nhận ra được điều này? Ta làm như sau:

Xét phương trình: $\sqrt{x^2-2x+3} = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ $\quad (*)$

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} - m = \frac{x^2+1}{x+1} - m \ \ (m>0)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} - m = \frac{x^2-mx-m+1}{x+1}\\
&\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}-m\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3}+m\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+m} = \frac{x^2-mx-m+1}{x+1}\\
&\frac{x^2-2x+3-m^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+m} = \frac{x^2-mx-m+1}{x+1}
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chỉ cần xác định m sao cho

$$x^2-2x+3-m^2 = x^2-mx-m+1 \Leftrightarrow -2=-m \vee 3-m^2=-m+1 \Rightarrow m=2$$

Từ đó ta suy ra lời giải như đã trình bày.

Bài 2: Giải phương trình: $3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+8} - 2 = \sqrt{x^2+15} \quad (1.2)$

Giải

Dự đoán được nghiệm $x = \pm 1$, ta viết lại phương trình như sau:

$$\begin{aligned}
(1.2) &\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right) + \left(\sqrt{x^2+8}-3\right) = \left(\sqrt{x^2+15}-4\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} + \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} \quad (*)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có:

$\sqrt{x^2+15} > \sqrt{x^2+8} \Rightarrow \sqrt{x^2+15}+4 > \sqrt{x^2+8}+3 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

Nên phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; -1\}$□.

Bài 3: Giải phương trình: $2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{x^3+1} \quad (1.3)$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant -1$

Do $x=-1$ không phải là nghiệm phương trình nên ta xét $x > -1$.

Khi đó viết lại (1.3) dưới dạng

$$(1.3) \Leftrightarrow 2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} \Leftrightarrow 2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{\frac{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)}{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x^2+2\right)}{5(x+1)} = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2+2\right)}{5(x+1)} - 2 = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10x-6}{5(x+1)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}-2\right)\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}+2\right)}{\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10x-6}{5(x+1)} = \frac{x^2-5x-3}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3=0 \\ \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+1}} + 2 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5+\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của (1.3) là $S = \left\{\frac{5-\sqrt{37}}{2}; \frac{5+\sqrt{37}}{2}\right\}$ □

Bài 4: Giải phương trình: $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5} = 1-3x \quad (1.4)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đánh giá phương trình, ta thấy phương trình có dạng hằng đẳng thức $(x+1)^3$ nên ta sẽ biến đổi phương trình theo hằng đẳng thức để biểu thức gọn hơn. Thật vậy từ phương trình đầu ta có biểu thức gọn hơn như sau:

$$(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2$$

Đến đây, ta có thể dễ dàng nhẩm nghiệm hơn. Thật vậy, nhẩm nghiệm của phương trình ta có phương trình có nghiệm là $x = 1$. Đối với căn bậc ba, ta cũng làm tương tự như căn bậc hai.

⊛ Lời giải:

Viết lại (1.4) dưới dạng

$$(1.4) \Leftrightarrow (x+1)^3 - 8 = 3\sqrt[3]{3x+5} - 6$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(x+1)^2+2(x+1)+4] = \frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(3x+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x+5} + 4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ [(x+1)^2+2(x+1)+4]\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2} + 2\sqrt[3]{3x+5}+4\right) = 9\,(*) \end{array}\right.$$

Do có căn bậc ba nên việc giải (*) sẽ có phần phức tạp hơn. Ta có thể dùng bất đẳng thức như sau:

$$(*) \Leftrightarrow \left[(x+2)^2+3\right]\left[\left(\sqrt[3]{3x+5}+1\right)^2+3\right] = 9$$

Lại có $(x+2)^2+3 \geqslant 3$ và $(\sqrt[3]{3x+5}+1)^2+3 \geqslant 3 \Rightarrow VT(*) \geqslant 9$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=-2 \\ \sqrt[3]{3x+5}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{-2;1\}$ □

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1 \quad (1.5)$

Giải

Viết lại (1.5) dưới dạng

$$\begin{aligned}
(1.5) &\Leftrightarrow \sqrt[3]{162x^3+2}-2-\sqrt{27x^2-9x+1}+1=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{162x^3-6}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x\,(3x-1)}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0 \\
&\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2\,(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right]=0
\end{aligned}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned}
&\frac{2\,(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0 \\
\Leftrightarrow &\frac{2\,(9x^2+3x+1)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}=\frac{3x}{\sqrt[3]{162x^3+2}}
\end{aligned}$$

Đặt $a=\sqrt[3]{162x^3+2}$, suy ra

$$\begin{aligned}
&2\left(3x+\frac{1}{3x}+1\right)=a+\frac{4}{a}+2 \Leftrightarrow 3x+\frac{1}{3x}+1=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}+1 \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{a}{2} \\ 3x=\dfrac{2}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$ □.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \quad (1.6)$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant \dfrac{5}{3}$

⊛ Ý tưởng: Ta nhận thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình đã cho có thể phân tích được về dạng $(x-2)\,Q\,(x)=0$.

⊛ Lời giải:

Viết lại (1.6) dưới dạng

$$\begin{aligned}(1.6) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}\\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0\ (*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do $\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}\Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$ nên $(*)$ vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$ □.
Ở trên ta đã làm quen với kĩ thuật thêm bớt và tách **số**, nhưng nếu phương trình có nhiều nghiệm thì không thể dùng cách đó. Sau đây là kĩ thuật thêm bớt và tách **ẩn**. Ý tưởng của phương pháp này là dùng ẩn như vai trò của số sau khi đã nhẩm nghiệm.

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 \quad (1.7)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhẩm nghiệm ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.
Ta thử kĩ thuật tách số với phương trình này:

$$\begin{aligned}(1.7) &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-1+x^2-3x+2=0\\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=2-x\ (*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Nhận thấy $(*)$ vẫn còn nghiệm. Vậy việc thêm bớt số đã không thể tìm được hết nghiệm. Nếu quy đồng phương trình $(*)$, ta lại phải giải phương trình khá phức tạp là $x=(2-x)\sqrt{2x-1}$. Vậy ta cần suy nghĩ đến việc dùng ẩn để thay thế số.
⊛ Lời giải:
Điều kiện: $x\geqslant \frac{1}{2}$
Thật vậy, từ phương trình đầu ta có:

$$\begin{aligned}(1.7) &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-x+x^2-2x+1=0\\ &\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{\sqrt{2x-1}+x}+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+x}=1(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Như vậy chỉ cần giải (*):

$$(*) \Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + x^2 = 2x - 1 \\ 1 \geqslant x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ 1 \geqslant x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}$$

Kết luận: phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 2 - \sqrt{2}\}$

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt[3]{12x^2 + 46x - 15} - \sqrt[3]{x^3 - 5x + 1} = 2x + 2 \quad (1.8)$

Giải

Viết lại (1.8) dưới dạng

$$(1.8) \Leftrightarrow \sqrt[3]{12x^2 + 46x - 15} - (2x+1) - \sqrt[3]{x^3 - 5x + 1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x^3 + 40x - 16}{\left(\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + \dfrac{2x+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3(2x+1)^2}{4}} - \frac{x^3 - 5x + 2}{\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^3 - 40x + 16}{(\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + \dfrac{2x+1}{2})^2 + \dfrac{3(2x+1)^2}{4}} + \frac{x^3 - 5x + 2}{(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x^3 - 5x + 2)}{\left(\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + \dfrac{2x+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3(2x+1)^2}{4}} + \frac{x^3 - 5x + 2}{\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 5x + 2 = 0 \\ \dfrac{8}{\left(\sqrt[3]{12x^2+46x-15} + \dfrac{2x+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3(2x+1)^2}{4}} + \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} = 0\,(*) \end{array}\right.$$

Do $(*)$ vộ nghiệm nên(1.8) $\Leftrightarrow x^3 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \sqrt{2} - 1 \\ x = -\sqrt{2} - 1 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình trên là $S = \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1; 2\}$ □

⊛ Nhận xét: Câu hỏi đặt ra là: Tại sao xuất hiện đại lượng $x^3 - 5x + 2 = 0$? Bằng cách thêm bớt $ax + b$ vào phương trình và đồng nhất hệ số, ta sẽ làm xuất hiện các đại lượng như vậy. Điển hình ta xét các ví dụ sau:

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 6x - 5} = \sqrt{(2-x)^5 + \sqrt{(2-x)}(2x^2 - x - 10)} \quad (1.9)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đầu tiên ta có (1.9) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 5} = \sqrt{2-x}(3x^2 - 5x - 6)$

Dùng máy tính bấm nghiệm ta thấy phương trình ra nghiệm xấu. Chính vì thế, ta sẽ thêm bớt

ẩn cho phù hợp để có thể nhân lượng liên hợp:
Do giả thiết ở phương trình này có $\sqrt{2-x}$ nên ta sẽ thêm bớt $\alpha\sqrt{2-x}$ vào phương trình:

$$\sqrt{3x^2-6x-5}-\alpha\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}(3x^2-5x-6-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-x(6-\alpha^2)-5-2\alpha^2}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\alpha\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}(3x^2-5x-6-\alpha)$$

Để có nhân tử chung, ta sẽ đồng nhất hệ số của 2 vế:

$$\begin{cases} 6-\alpha^2=5 \\ 5+2\alpha^2=6+\alpha \end{cases} \Rightarrow a=1$$

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\leqslant 2 \\ 3x^2-6x-5\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant \dfrac{3+2\sqrt{6}}{3} \\ x\leqslant \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x\leqslant \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$

Viết lại (1.9) dưới dạng

$$(1.9) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-5}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}(3x^2-5x-7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-5x-7}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}(3x^2-5x-7)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-7=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3x^2-6x-5}+\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}\,(*) \end{array}\right.$$

Xét (*) ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 1=2-x+\sqrt{(2-x)(3x^2-6x-5)} \Leftrightarrow x-1=\sqrt{(2-x)(3x^2-6x-5)}$$

Với điều kiện $x\leqslant \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$ thì $VT\leqslant \dfrac{-2\sqrt{6}}{3}<0\leqslant VP$

Vậy phương trình (1.9) tương đương: $3x^2-5x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{5+\sqrt{109}}{6} & \text{(không thoả } x<2) \\ x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{6} & \text{(chọn)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{\dfrac{5-\sqrt{109}}{6}\}$ □

Bài 10: Giải phương trình: $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$ (1.10)

Giải

Điều kiện: $-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

⊛ Ý tưởng: Ở bài này, tuy biết phương trình có 2 nghiệm nhưng đó lại là nghiệm vô tỉ nên ta không thể biết chính xác nghiệm. Tuy nhiên ta chỉ quan tâm tới biểu thức cần thêm bớt tạo từ 2 nghiệm trên. Do đó ta sẽ lần lượt dùng chức năng Shift Solve để tìm ra 2 nghiệm của phương trình là: $x_1=-0,6180339887...; x_2=1,618033989...$ sau đó gán hai nghiệm này vào hai biến

A và B.
Bây giờ ta sẽ thử tìm tam thức bậc 2 tạo từ 2 nghiệm trên. Nghĩa là ta cần tính $A+B$ và $A.B$.
Thu được $A+B=1, AB=-1$.
Điều đó đã chứng tỏ A, B là hai nghiệm của phương trình: $X^2-X-1=0$
Và từ đây, ta có thể dự đoán được x^2-x-1 là một nhân tử của phương trình.
Ta viết phương trình đã cho lại thành:

$$(1.10) \Leftrightarrow x^3-3x+1-(px+q)-\sqrt{8-3x^2}+px+q=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x+1-(px+q)+\frac{(px+q)^2-(8-3x^2)}{\sqrt{8-3x^2}+px+q}=0 \ (2)$$

$$\Leftrightarrow x^3-(p+3)x+1-q+\frac{(p^2+3)x^2+2pqx+q^2-8}{\sqrt{8-3x^2}+px+q}=0$$

Đến đây, để xuất hiện nhân tử x^2-x-1 thì $(p^2+3)x^2+2pqx+q^2-8=\partial(x^2-x-1)$ với ∂ là một hệ số. Chọn $\partial=4$ thì ta được một cặp (p,q) thỏa mãn là $(p,q)=(-1;2)$.
⊛ Lời giải:
Viết lại (2) dưới dạng

$$x^3-2x-1+4\frac{x^2-x-1}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}\right)=0$$

Xét $f(x)=\sqrt{8-3x^2}+2-x$, ta có: $f'(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}}-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}}=1 \Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{2\sqrt6}{3}$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$-\frac{2\sqrt6}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{6+2\sqrt6}{3}$	↗	$\frac{6+4\sqrt6}{3}$	↘	$\frac{6+2\sqrt6}{3}$

$\Rightarrow 0<f(x)\leqslant \dfrac{6+4\sqrt6}{3}$

$\Rightarrow x+1+\dfrac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=x+1+\dfrac{4}{f(x)}\geqslant -\dfrac{2\sqrt6}{3}+1+\dfrac{12}{6+4\sqrt6}>0$

Vậy phương trình đã cho tương đương $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$ □

Bây giờ chúng ta sẽ phối hợp các kĩ thuật trên để giải bài toán sau:

Bài 11: Giải phương trình

$$(x-1)\sqrt{2x^2-5x-15}+\sqrt{\frac{2x^3-7x^2+19}{2}}=2x^3-7x^2-12x+17+\sqrt{7x} \quad (1.11)$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta nhận xét thấy các hệ số có cùng số mũ trong căn thức giống nhau. Điều này gợi cho ta ý tưởng thêm bớt ẩn và số sao cho phù hợp nghiệm.
Để không quá phụ thuộc vào việc đoán nghiệm nên ta sẽ thêm bớt $\alpha x+\beta$ để tìm hệ số tách

hợp lý. Để $(x-1)\sqrt{2x^2-5x-15}$ có dạng bậc ba giống như trong căn thức và ngoài căn thức (vì hệ số của số mũ lớn nhất trong căn và ngoài căn giống nhau) ta sẽ thêm bớt $\alpha(x-1)$. Việc đồng nhất các hệ số đó sẽ cho ta biết nên tách $\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}}$ như thế nào.

$(1.11) \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{2x^2-5x-15}-\alpha)+\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}} = 2x^3-7x^2-(12+\alpha)x+17+\alpha+\sqrt{7x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(2x^2-5x-15-\alpha^2)}{\sqrt{2x^2-5x-15}+\alpha}+\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}} = 2x^3-7x^2-(12+\alpha)x+17+\alpha+\sqrt{7x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^3-7x^2-(10+\alpha^2)x+15+\alpha^2}{\sqrt{2x^2-5x-15}+\alpha}+\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}} = 2x^3-7x^2-(12+\alpha)x+17+\alpha+\sqrt{7x}$

Đồng nhất hệ số, ta có:

$$\begin{cases} 10+\alpha^2 = 12+\alpha \\ 15+\alpha^2 = 17+\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha^2-\alpha-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \alpha=2 \end{array}\right.$$

Do nhân lượng liên hợp với $\sqrt{ax+b}-c$ nên ta nhận nghiệm dương. Vậy ta chọn $\alpha = 2$.

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{5+\sqrt{145}}{4} \\ x^3-\dfrac{7}{2}x^2+\dfrac{19}{2} \geqslant 0 \end{cases}$

Viết lại (1.11) dưới dạng

$$(1.11) \Leftrightarrow \frac{2x^3-7x^2-14x+19}{\sqrt{2x^2-5x-15}+2}+\sqrt{\frac{2x^3-7x^2+19}{2}} = 2x^3-7x^2-14x+19+\sqrt{7x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-7x^2-14x+19}{\sqrt{2x^2-5x-15}+2}+\sqrt{\frac{2x^3-7x^2+19}{2}}-\sqrt{7x} = 2x^3-7x^2-14x+19$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-7x^2-14x+19}{\sqrt{2x^2-5x-15}+2}+\frac{2x^3-7x^2-14x+19}{\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}}+\sqrt{7x}} = 2x^3-7x^2-14x+19$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3-7x^2-14x+19=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x-15}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}}+\sqrt{7x}} = 1(*) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5+\sqrt{177}}{4} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{177}}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x-15}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}}+\sqrt{7x}} = 1(*) \end{array}\right.$$

Dễ thấy VT của phương trình $(*)$ là hàm nghịch biến. Mặt khác theo điều kiện xác định $x \geqslant \dfrac{5+\sqrt{145}}{4} > 1$. Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Xét với điều kiện xác định. Vậy phương trình trên có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{5+\sqrt{177}}{4}$ □

⊛ Nhận xét: Có thể nhẩm được nghiệm $x = 1$. Từ đó việc tách ẩn sẽ dễ dàng hơn. Nhưng một cách tổng quát ta sẽ làm như trên trong mọi trường hợp có khả năng dùng lượng liên hợp. Tuy nhiên khuyết điểm của phương pháp này là nếu gặp phương trình không có bất kì 1 nghiệm

hữi tỉ nào và sau khi thêm bớt $\alpha x+\beta$ ta không tìm được $\alpha;\beta$ hoặc gặp 1 hệ phương trình phức tạp trong khi đồng nhất hệ số thì việc tách ẩn dùng lượng liên hợp khó có thể đạt hiệu quả. Nhưng lượng liên hợp lại có thế mạnh trong 1 số bài toán xét điều kiện phức tạp. Điển hình là những phương trình vô tỷ chứa trị tuyệt đối:

Bài 12: Giải phương trình: $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$ (1.12)

Giải

Điều kiện: $-2\leqslant x\leqslant 3$

$$(1.12)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3-x}-|x-1|\right)+\left(\sqrt{2+x}-|x|\right)=x^3+x^2-4x-4$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x}+|x|}=(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow(2-x)(x+1)\left[\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+|x|}+(x+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-1;2\}$ □

⊛ Nhận xét: Với bài này, việc xuất hiện thêm các đa thức chứa trị tuyệt đối tưởng chừng như sẽ gây cho ta thêm khó khăn trong việc giải quyết. Nhưng nhờ sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp, bài toán đã được giải quyết nhanh chóng! Khi ấy, ta chỉ cần chuyển các lượng trên về đúng vị trí và sử dụng phương pháp nhân liên hợp là đủ.

KĨ THUẬT GHÉP HẠNG TỬ

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$ (2.1)

Giải

Điều kiện: $x\geqslant\dfrac{5}{3}$

⊛ Ý tưởng: Đối với kĩ thuật áp dụng vào một số bài tập, việc đoán nghiệm có thể không cần thiết vì ta sẽ nhóm từng hạng tử của 2 vế với nhau để tạo ra nhân tử chung. Thật vậy, ta có thể thấy:

$10x+1-9x-4=x-3$ và $3x-5-2x+2=x-3$

Vậy ta có thể dễ dàng thấy được nhân tử chung cần nhóm là $x-3$ và không cần nhẩm nghiệm. Do đó ta có thể giải bài phương trình này như sau:

⊛ Lời giải:

Viết lại (2.1) dưới dạng

$$(2.1)\Leftrightarrow\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\\dfrac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0\ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3\ (\text{chọn})$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$ □

MỞ RỘNG:

Sau đây ta sẽ xét hệ số của các căn thức. Nếu thay đổi hệ số của các căn thức trên, ta sẽ được một ví dụ khác khó hơn:

Bài 1*: Giải phương trình
$$\sqrt{26}\sqrt{10x+1}+\sqrt{\frac{26}{31}}\sqrt{3x-5}=\frac{28}{\sqrt{26}}\sqrt{9x+4}-\frac{5}{\sqrt{806}}\sqrt{2x-2} \quad (2.1*)$$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant \frac{5}{3}$

Đối với bài này, ý tưởng của ta là đồng nhất các hệ số để tạo ra nhân tử chung: Quan sát phương trình này, ta thấy có khả năng ghép đối xứng các phương trình của 2 vế tạo ra nhân tử chung là $x-3$. Nhưng hệ số ở đây khá phức tạp, vì thế ta cần phải đồng nhất hệ số để ghép cho phù hợp.

Ta thêm bớt $\alpha\sqrt{9x+4}$ và $\beta\sqrt{2x-2}$ để tìm hệ số $\alpha;\beta$ phù hợp:

$$\sqrt{26}\sqrt{10x+1}-\alpha\sqrt{9x+4}+\sqrt{\frac{26}{31}}\sqrt{3x-5}-\beta\sqrt{2x-2}=\left(\frac{28}{\sqrt{26}}-\alpha\right)\sqrt{9x+4}-\left(\frac{5}{\sqrt{806}}+\beta\right)\sqrt{2x-2}$$

Ta dự đoán $\alpha=\sqrt{26}$, $\beta=\sqrt{\frac{26}{31}}$ thì VT sẽ xuất hiện nhân tử chung là $x-3$. Để kiểm chứng lại, ta sẽ làm như sau:

Để xuất hiện nhân tử chung là $x-3$ thì VP sau khi nhân liên hợp phải xuất hiện $x-3$ hoặc $3-x$. Vậy để tìm ra số $\alpha;\beta$ nhanh gọn, ta có thể tìm a,b thoả

$$\left[\begin{array}{l} a\sqrt{9x+4}-b\sqrt{2x-2}=x-3 \\ a\sqrt{9x+4}-b\sqrt{2x-2}=3-x \end{array}\right.$$

Ta đưa về giải hệ phương trình:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9a^2-2b^2=1 \\ 4a^2+2b^2=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 9a^2-2b^2=-1 \\ 4a^2+2b^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{2}{13} \\ b^2=\dfrac{31}{26} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{2}{13}} \\ b=\sqrt{\dfrac{31}{26}} \end{cases}$$

Từ đó tìm được hệ số α,β: $\begin{cases} \dfrac{28}{\sqrt{26}}-\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{13}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{806}}+\beta=\sqrt{\dfrac{31}{26}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\sqrt{26} \\ \beta=\sqrt{\dfrac{26}{31}} \end{cases}$

Điều này đúng như ta đã dự đoán, vậy làm như tương tự như ở bài 1 ta sẽ có nghiệm duy nhất là $x=3$. Vậy ta tự hỏi có thể tìm được hệ số bất kì cho phương trình trên hay không? Sau đây ta sẽ xét điều đó:

Bài 2*: Tìm mối quan hệ giữa các hệ số để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$a\sqrt{10x+1}+b\sqrt{3x-5}=c\sqrt{9x+4}+d\sqrt{2x-2}$$

Giải

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$a(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4})+b(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2})=(c-a)\sqrt{9x+4}+(d-b)\sqrt{2x-2}$$

Theo như Ví dụ 1 (*) ta sẽ có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}(c-a)^2=\dfrac{2}{13}\\ \\(d-b)^2=\dfrac{31}{26}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c-a=\sqrt{\dfrac{2}{13}}\\ \\d-b=-\sqrt{\dfrac{31}{26}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=c-\sqrt{\dfrac{2}{13}}\\ \\b=d+\sqrt{\dfrac{31}{26}}\end{cases}$$

Ta chọn hệ số như trên là để có thể nhân lượng liên hợp cho $a\sqrt{9x+4}$ và $b\sqrt{2x-2}$.

Vậy $\begin{cases}a=c-\sqrt{\dfrac{2}{13}}\\b=d+\sqrt{\dfrac{31}{26}}\end{cases}$ là hệ số chuẩn để phương trình có nghiệm duy nhất. □

Bài 2: Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}\ (2.2)$$

Giải

⊛ Ý tưởng:

Trước hết, kiểm tra ta thấy được rằng phương trình đã cho có một nghiệm $x=2$ nên ta sẽ cố gắng đưa phương trình trên về phương trình tích xuất hiện nhân tử $(x-2)$. Ta có nhận xét rằng: $(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2\left(x-2\right)$ và $(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3\left(x-2\right)$

Ta đi đến lời giải như sau:

⊛ Lời giải:

Viết lại (2.2) dưới dạng

$$\begin{aligned}(2.2)&\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}\\&\Leftrightarrow\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x+1\right)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\\&\Leftrightarrow(x-2)\left[\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right]=0\\&\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

Vậy phương trình (2.2) có nghiệm duy nhất $x=2$. □

Bài tập tự luyện

1. Bài tập cơ bản

1) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

2) $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}=1$

3) $\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{2x^2-6x+1}=2$

4) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

5) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-3}=1$

6) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-7}=4$

7) $\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt{x^3+1}-x^4=1$

8) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x}=3$

9) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}=-x^2+2x+1$

10) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{-2x^2+3x-1}=\sqrt{3}$

11) $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+5x+6}=\sqrt{7x^2+8x+9}+\sqrt{10x^2+11x+12}$

12) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

13) $\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x-5$

14) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}=\sqrt{x+100}$

15) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+1}{3}$

16) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

17) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

18) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$

19) $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\,(x^2-4x-2)$

2. Bài tập nâng cao

1) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+x=\dfrac{x+3}{x^2-6}+5$

2) $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

3) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

4) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

5) $\sqrt{2x^2-5}+2x^2-5+\sqrt[3]{4x^4-29x^2+25}=\sqrt{3x}+\sqrt{12x^3-9x^2-30x}$

6) $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+3}=2(x+\dfrac{3}{x})$

7) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2+4x-23}$

8) $x^2-x-3+\sqrt{2x+5}=0$

9) $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$

10) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{7}{4}$

11) $\sqrt{2}\,(x^2+8)=5\sqrt{x^3+8}$

12) $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2$

13) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\dfrac{x^2-1}{2x-3}$

14) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

Trong những bài toán giải phương trình vô tỷ thì dùng đơn điệu của hàm số là một phương pháp mạnh và thường cho ta lời giải đẹp. Bài viết này sẽ giới thiệu một số ứng dụng của phương pháp trên. Mỗi bài toán điều được trình bày theo thứ tự Ý tưởng - Lời giải – Nhận xét, với mong muốn cho bạn đọc có một cái nhìn sâu hơn về cách tư duy và kinh nghiệm giải toán.

Lý thuyết

▶ **Định lý 1:** Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = k$ không nhiều hơn một và $\forall x, y \in D : f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

▶ **Định lý 2:** Nếu hàm số f(x) và g(x) đơn điệu ngược chiều và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

▶ **Định lý 3:** Nếu hàm số f(x) luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì
$f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$ (hoặc $x < y$)

Vận dụng linh hoạt các định lý trên, từ một phương trình ẩn x, ta sẽ đưa hai vế về dạng $f(g(x)) = f(h(x))$ với $f(t)$ là một hàm đơn điệu trên miền D đang xét. Thông thường ta có thể dự đoán được $h(x)$ và bậc của $g(x)$, từ đó đồng nhất hệ số để tìm $g(x)$ (ưu tiên hệ số nguyên). Các bài toán sau sẽ làm rõ ý tưởng trên:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x + \sqrt{7x+2}} = 4$ (1.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: VT toàn dấu cộng nên ta hi vọng đây là một hàm đồng biến theo x. Khi đó theo **định lý 1**, (1.1) có nghiệm duy nhất (dễ thấy đó là $x = 1$).

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: (*) $\begin{cases} x > \dfrac{-1}{3} \\ x + \sqrt{7x+2} > 0 \end{cases}$

Đặt VT (1.1) là f(x). Ta có

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + \left(1 + \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}\right).\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}} > 0 \ \forall x \text{ thoả (*)}$$

Vậy $f(x) = 4 = f(1) \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại ta thấy $x = 1$ thoả phương trình.Vậy (1.1) có tập nghiệm $S = \{1\}$ □

⊛ Nhận xét: Đây là một ứng dụng cơ bản của phương pháp đơn điệu. Ta chỉ việc đưa các biến về cùng một vế và xét đạo hàm. Chúng ta sẽ không đi sâu vào dạng này, mà tập trung nhiều hơn về cách xây dựng hàm số.

Bài 2: Giải phương trình với $a > 0$ (x là ẩn): $x^3 - b = a\sqrt[3]{ax+b}$ (2.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta nghĩ tới việc đưa hai vế về dạng $f(g(x)) = f(h(x))$ trong đó $f(t) = mt^3 + nt$. Có thể xác định $h(x)$ ở VP chính là $\sqrt[3]{ax+b}$, còn $g(x)$ ở VT có bậc nhất nên $g(x) = px + u$.
Để ý tiếp, ta thấy VT(2.1) sau khi biến đổi sẽ trở thành: $m(px+u)^3 + n(px+u)$. Như vậy thì hạng tử bậc ba sẽ là mp^3x^3, trong khi ở phương trình ban đầu là x^3. Do đó $mp^3 = 1$
Vì ưu tiên số nguyên nên ta lấy $m = p = 1$. Tương tự, ở VP thì hạng tử bậc nhất là $a\sqrt[3]{ax+b}$, tương ứng với $nh(x)$ trong $f(h(x))$, nên $n = a$.
Vậy $f(t) = t^3 + at$. Do đó ta cần đưa (2.1) về dạng

$$(x+u)^3 + a(x+u) = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b} \ (2.2)$$

Tiếp tục phân tích, ta thấy VT không xuất hiện x^2 nên có ngay $u = 0$, vì nếu $u \neq 0$ ta không thể khử hạng tử $3ux^2$.
Nghĩa là

$$(2.2) \Leftrightarrow x^3 + ax = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b}$$

Dễ thấy chỉ cần cộng $ax + b$ vào 2 vế của (2.1) là ta có (2.2). Công việc đến đây trở nên đơn giản.
⊛ Lời giải:

$$(2.1) \Leftrightarrow x^3 - b + ax + b = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{ax+b}) \text{ với } f(t) = t^3 + at$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow x^3 = ax + b$$

Đây chính là phương trình bậc 3 dạng cơ bản. □
⊛ Nhận xét: Bài toán trên cho ta một cách nhìn sơ lược về đơn điệu hàm số, trong đó phần quan trọng nhất là xây dựng hàm và dùng những đánh giá thích hợp để tìm ra hệ số. Chúng ta cũng có thể mở rộng hơn một chút:

Bài 2*: Giải phương trình $x^n - b = a\sqrt[n]{ax+b}$ $(n \in N)$, n lẻ và $a > 0$

Sau đây là một ví dụ khó hơn:

Bài 3: Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$ (3.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta cần đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(g(x)) = f(h(x))$ trong đó $f(t) = mt^3 + nt$
Để ý rằng hạng tử $\sqrt[3]{3x-5}$ ở VP có bậc thấp nhất nên tương ứng với $nh(x)$ trong $f(h(x))$, vậy $n = 1$.
Như bài 2, ta xác định $g(x) = px + u$. VT sau khi biến đổi sẽ là $m(px+u)^3 + n(px+u)$. Xét hạng tử bậc 3 ta được $mp^3x^3 = 8x^3$. Như vậy $mp^3 = 8$. Tuy nhiên đến đây lại có 2 trường hợp mà ta sẽ phải lần lượt xét: $m = 8, p = 1$ hoặc $m = 1, p = 2$
⋇ Nếu $m = 1 :\Rightarrow f(t) = t^3 + t$. Do đó cần đưa (3.1) về dạng

$$(2x+u)^3 + (2x+u) = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + x^2(12u) + x(6u^2 - 1) + u^3 + u + 5 = \sqrt[3]{3x-5}$$

Đồng nhất hệ số với VT của (3.1) ta được

$$\begin{cases} 12u = -36 \\ 6u^2 - 1 = 53 \\ u^3 + u + 5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow u = -3$$

Vậy trường hợp $m = 1$ đã cho kết quả, do đó không cần xét $m = 8$.

⊛ Lời giải:

$$(3.1) \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^3 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow f(2x-3) = f(\sqrt[3]{3x-5})(2.2) \text{ với } f(t) = t^3 + t$$

Ta có$f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó

$$(3.2) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow (2x-3)^3 = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy (3.1) có tập nghiệm $S = \{2; \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}\}$ □

⊛ Nhận xét: Đôi khi ta cần tinh ý trong việc xây dựng hàm, như trong bài trên hệ số bậc cao nhất có thể là 8 hoặc 1. Một ví dụ khác:

Bài 3*: Giải phương trình $4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = \sqrt[3]{4x+5}$

Lưu ý rằng $4x^3 = 4(x^3) = \dfrac{1}{2}.(2x)^3$ do đó ta cũng cần xét 2 trường hợp.

Bài toán trên cũng có thể giải bằng cách đặt $\sqrt[3]{4x+5} = 2y + 3$ để đưa về hệ đối xứng loại II. Những bước phân tích trên nhìn tuy dài nhưng khi đã quen rồi thì ta có thể tính rất nhanh.Tuy nhiên, trong một số bài toán, hàm $f(t)$ của ta không đồng biến trên $\mathbb{R}$ nhưng ta có thể chỉ cần xét đơn điệu trên miền xác định $\mathbb{D}$.

Bài 4: Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$ (4.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta xây dựng hàm $f(t) = mt^2 + nt$. Để ý rằng hạng tử $\sqrt{x-1}$ ở VP có bậc thấp nhất nên tương ứng với $nh(x)$ trong $f(h(x))$, do đó $n = 1$. Như bài 3, khi đã xác định $g(x) = px + u$ và $mp^2 = 9$, ta cũng thử xét 2 trường hợp: $m = 9, p = 1$ hoặc $m = 1, p = 3$.

⁎ Nếu $m = 9 :\Rightarrow f(t) = 9t^2 + t$. Vậy cần đưa (3.1) về dạng

$$9(x+u)^2 + x + u = 9(x-1) + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + x(18u - 8) + u^2 + u + 9 = \sqrt{x-1}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} 18u - 8 = -28 \\ u^2 + u + 9 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{-10}{9} \\ u \in \{-4; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow u \in \emptyset$$

⋇ Nếu $m = 1 :\Rightarrow f(t) = t^2 + t$. Vậy cần đưa (3.1) về dạng

$$(3x + u)^2 + 3x + u = x - 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 9x^2 + x(6u + 2) + u^2 + u + 1 = \sqrt{x-1}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} 6u + 2 = -28 \\ u^2 + u + 1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow u = -5$$

Đến đây có lẽ bài toán đã được giải quyết nhưng thật ra "chông gai" còn ở phía trước. Thử làm tiếp ta sẽ có

$$(4.1) \Leftrightarrow x^2 - 30x + 25 + 3x - 5 = x - 1 + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(3x - 5) = f(\sqrt{x-1}) \text{ (4.2) với } f(t) = t^2 + t$$

(!) Lưu ý rằng $f(t) = t^2 + t$ chỉ đồng biến trên $(\dfrac{-1}{2}; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; \dfrac{-1}{2})$, hơn nữa $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant \dfrac{-1}{2}$.
Như vậy từ (4.2) ta chỉ suy ra $3x - 5 = \sqrt{x-1}$ khi $3x - 5 \geqslant \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{2}$.
Còn $x \in [1; \dfrac{3}{2}]$ thì sao? Lại để ý rằng hàm số bậc 2 cũng có cái hay của nó, đó là $t^2 = (-t)^2$. Ở trên, dựa vào hệ số của x^2, ta chỉ mới xét $g(x) = px + u$ với $mp^2 = 9$ và $p \in \mathbb{N}^*$, nhưng thực ra vẫn còn trường hợp $\boxed{m = 1, p = -3}$. Ta sẽ xét tiếp trường hợp này:
Cần đưa (4.1) về dạng

$$(u - 3x)^2 + u - 3x = x - 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 9x^2 + x(-6u - 4) + u^2 + u + 1 = \sqrt{x-1}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} -6u - 4 = -28 \\ u^2 + u + 1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4$$

Kiểm tra lại: Có $x < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4 - 3x > \dfrac{-1}{2}$. Vậy chọn $u = 4$.
Đến đây bài toán mới thực sự được giải quyết.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $x \geqslant 1$
⋇ Nếu $x \geqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3x - 5 \geqslant \dfrac{-1}{2}$

Ta có

$$(4.1) \Leftrightarrow (3x - 5)^2 + (3x - 5) = (x - 1) + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(3x - 5) = f(\sqrt{x-1}) \text{ (với } f(t) = t^2 + t) \Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5\geqslant 0 \\ (3x-5)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \dfrac{5}{3} \\ x\in\left\{2;\dfrac{13}{9}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

⋇ Nếu $1\leqslant x<\dfrac{3}{2} :\Rightarrow 4-3x>\dfrac{-1}{2}$

Ta có

$$(4.1)\Leftrightarrow (4-3x)^2+4-3x = x-1+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow f(4-3x) = f(\sqrt{x-1}) \text{ (với } f(t)=t^2+t) \Leftrightarrow 4-3x=\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x\geqslant 0 \\ (4-3x)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \dfrac{4}{3} \\ x\in\left\{\dfrac{25\pm\sqrt{13}}{8}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{25-\sqrt{13}}{18} \text{ (chọn)}$$

Vậy (3.1) có tập nghiệm $S=\left\{2;\dfrac{25-\sqrt{13}}{18}\right\}$ □

⊛ Nhận xét: Cần linh hoạt trong việc xây dựng hàm số, nhất là đối với hàm bậc chẵn.
Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách đặt $\sqrt{x-1}=3y-5$ để đưa về hệ đối xứng loại 2.

Bài 5: Giải phương trình $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$ (5.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Như những bài trước, đầu tiên ta thử đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(t)=3t^3+3t$.
(5.1) trở thành:

$$3(x-u)^3+3(x-u) = 9(-3x^2+21x+5)+3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3+x^2(-9u+27)+x(9u^2-186)+(-3u^3-3u-45) = 3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

Đồng nhất hệ số với VT(5.1) ta được $\begin{cases} -9u+27=-6 \\ 9u^2-186=-3 \\ -3u^3-3u-45=-17 \end{cases}$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm. Vậy ta không thể xây dựng hàm như bình thường. Để ý rằng nguyên nhân dẫn đến việc này là vì hệ số của $9(-3x^2+21x+5)$ quá lớn, cản trở việc đồng nhất hệ số. Vậy ta hãy thử xây dựng hàm theo một hướng khác:
Nhân 9 cho 2 vế của (5.1) ta được:

$$(5.1)\Leftrightarrow 27x^3-54x^2-27x-153 = 27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)} \text{ (5.2)}$$

Bây giờ ta sẽ đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(t)=t^3+27t$ (cách tìm hàm số tương tự những bài trên).
(5.2) trở thành:

$$(3x-u)^3+27(3x-u) = 9(-3x^2+21x+5)+27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3+x^2(-27u+27)+x(9u^2-108)-27u-u^3-45 = 27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} -27u + 27 = -54 \\ 9u^2 - 108 = -27 \\ -27u - u^3 - 45 = -153 \end{cases} \Leftrightarrow u = 3$

Bài toán được giải quyết.

⊛ Lời giải: Nhân 9 vào 2 vế ta có phương trình:

$$(3x-3)^3 + 27(3x-3) = 9(-3x^2+21x+5) + 27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$
$$\Leftrightarrow f(3x-3) = f(\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}) \text{ (với } f(t) = t^3 + 27t)$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3 = \sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)} \Leftrightarrow (3x-3)^3 = 9(-3x^2+21x+5)$$
$$\Leftrightarrow 3(x-1)^3 = (-3x^2+21x+5) \Leftrightarrow 3x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}(1+\sqrt[3]{2})^2 \text{ (tham khảo cách giải PT bậc 3 tổng quát)}$$

⊛ Nhận xét: Một câu hỏi đặt ra là: Tại sao lại nhân 9 mà không phải là số khác? Thật ra điều này đã được đề cập đến rồi. Khi xây dựng hàm $f(t) = mt^3 + 3t$, ta thường nghĩ tới $g(x) = px + q$ nên $mp^3 = 3$, do đó $m = 3, p = 1$ mà quên rằng còn có $m = \frac{1}{9}, p = 3$ (trường hợp này thật ra hiếm gặp, trừ những bài hệ số lớn như bài này). Như vậy $f(t)$ cũng có thể là $\frac{t^3}{9} + 3t$ (và trong bài này thì đúng là vậy). Việc nhân 9 chỉ đơn giản là khử mẫu số.

Lưu ý rằng với những dạng phương trình như trên, ta sẽ khai triển và đồng nhất hệ số các bậc 3, 2, 1, 0. Nghĩa là ta được một 4 hệ phương trình, do đó số ẩn tối đa có thể là 4. Ở bài trên, ta vẫn có thể đặt $f(t) = mt^3 + t$, khi đó trong quá trình đồng nhất hệ số sẽ xuất hiện thêm 2 ẩn m và p nhưng vẫn giải được. Ta cùng xem qua bài tương tự:

Bài 6: Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$ (6.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta đưa hai vế về hàm số $f(t) = mt^3 + t$. Hệ số bậc nhất là 1, vì nó tương ứng với $\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$ ở VP. Ở VT thì hạng tử bậc 3 là x^3 nên ta nghĩ tới $m = 1$, nhưng việc đồng nhất hệ số không thành công (ở bài này nguyên nhân là do VP cũng có x^3 ở trong căn). Vậy, với nhận xét rằng ở VT thì $t = g(x) = px + u$, ta sẽ tìm cả p, u và m.

Cần đưa hai vế về dạng

$$m(px+u)^3 + (px+u) = m(-x^3 + 9x^2 - 19x + 11) + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$
$$\Leftrightarrow x^3(mp^3 + m) + x^2(3mup^2 - 9m) + x(3u^2mp + p + 19m) + mu^3 + u - 11m$$
$$= \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \text{ (6.2)}$$

Đồng nhất hệ số VT của (6.1) và (6.2) ta có

$$\begin{cases} mp^3 + m = 1 \\ 3mpu^2 - 9m = -6 \\ 3u^2mp + p + 19m = 12 \\ mu^3 + u - 11m = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ p = 1 \\ u = -1 \end{cases}$$

⊛ Lời giải:
Ta viết (6.1) dưới dạng

$$\frac{(x-1)^3}{2}+(x-1)=\frac{-x^3+9x^2-19x+11}{2}+\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$$
$$\Leftrightarrow f(x-1)=f(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11})\text{ (với }f(t)=\frac{t^3}{2}+t)$$
$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\text{ (do f(t) đồng biến trên }\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3=-x^3+9x^2-19x+11\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

Vậy (6.1) có tập nghiệm $S=\{1;2;3\}$ □

Chúng ta đã làm quen với một số bài phương trình **tổng**. Hãy xem qua những bài phương trình có **tích**.

Bài 7: Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$ (7.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: thoạt nhìn thì VT có bậc 3, VP có bậc $\frac{3}{2}$ nên khó có thể dùng đơn điệu. Nhưng nếu ở VP ta coi $y=\sqrt{3x+1}$ là ẩn thì VP cũng là bậc 3 theo y. Như vậy cần phân tích $3x+2=m(3x+1)+n(*)$, khi đó VP có dạng my^3+ny. Dễ thấy từ (*) có ngay $m=n=1$. Công việc còn lại là đưa VT về dạng $(x-u)^3+x-u$ là ta có thể dùng đơn điệu. Đồng nhất hệ số ta được $u=-1$.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $x\geqslant\frac{-1}{3}$
Ta có:

$$(7.1)\Leftrightarrow(x+1)^3+x+1=(3x+1+1)(\sqrt{3x+1})=(\sqrt{3x+1})^3+\sqrt{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt{3x+1})\text{ (với }f(t)=t^3+t)$$
$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow x\in\{0;1\}\text{ (thoả ĐKXĐ)}$$

Vậy (7.1) có tập nghiệm $S=\{0;1\}$ □.
⊛ Nhận xét: Với những bài phương trình tích cần linh hoạt trong việc đổi biến và xây dựng hàm để có thể đưa hai vế về hàm đặc trưng. Một số bài nhìn vào rất phức tạp đòi hỏi ta phải bình tĩnh phân tích. Hãy nhớ ta luôn cố gắng phân tích biểu thức bậc lớn theo biểu thức bậc nhỏ.

Bài 8: Giải phương trình $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$ (8.1)

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhìn qua sự sắp xếp của bài toán, ta thấy hai biểu thức ở VT khá giống nhau và hi vọng có thể tìm hàm đặc trưng của phương trình từ đây.
Đầu tiên đưa mỗi biểu thức về 1 vế:

$$(8.1)\Leftrightarrow(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=-3x(2+\sqrt{9x^2+3})\text{ (8.2)}$$

Như kinh nghiệm ở bài 7, ta sẽ phân tích biểu thức bậc lớn theo biểu thức bậc nhỏ.
Ta có $VP(8.2) = -3x(2+\sqrt{(-3x)^2+3})$ nên hi vọng $VT(8.2)$ cũng có thể đưa về $f(t) = t(2+\sqrt{t^2+3})$. Và để xuất hiện **số 2** trong $f(t)$ ta biến đổi:

$$VT(8.2) = (2x+1)(\sqrt{4x^2+4x+4}+2)$$

Dễ thấy $4x^2+4x+4 = (2x+1)^2+3$. Vậy ta đã xây dựng hàm thành công.
Tuy nhiên hàm số $f(t)$ có $f'(t) = 2+\dfrac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}}$ nên có thể đổi chiều đơn điệu, do đó ta phải có thêm một nhận xét: (8.1) chỉ có nghiệm trong $[\dfrac{-1}{2};0]$. Đến đây bài toán thực sự được giải quyết.
⊛ Lời giải:
⋇ Nếu $x>0$ hoặc $x<\dfrac{-1}{2}$ thì (8.1) vô nghiệm. Vậy ta xét $x\in[\dfrac{-1}{2};0]$.
Ta có

$$(8.1) \Leftrightarrow (8.2) \Leftrightarrow (2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) = (-3x)(2+\sqrt{(-3x)^2+3})$$

$$\Leftrightarrow f(2x+1) = f(-3x)\ (8.3) \text{ với } f(t) = t(2+\sqrt{t^2+3})$$

Do $f'(t) = 2+\dfrac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}} > 0\ \forall t\in[\dfrac{-1}{2};0]$ nên $(8.3) \Leftrightarrow 2x+1 = -3x \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{5}$ (chọn)
Vậy (8.1) có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{-1}{5}\right\}$ □
⊛ Nhận xét: Đây là một bài toán hay và khó, đòi hỏi phải có kĩ năng biến đổi linh hoạt. Ta cũng có lời giải gần gũi hơn, không cần dùng đạo hàm như sau:

$$(8.1) \Leftrightarrow (2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) = (-3x)(2+\sqrt{(-3x)^2+3})\ (*)$$

⋇ Nếu $x\in\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{5}\right)$: $\Rightarrow 3x < -2x-1 < 0 \Rightarrow (3x)^2 > (2x+1)^2$
$\Rightarrow 2+\sqrt{(3x)^2+3} > 2+\sqrt{(2x+1)^2+3} \Rightarrow VT(*) < VP(*)$
⋇ Nếu $x\in\left(\dfrac{-1}{5};0\right]$: Chứng minh tương tự ta cũng có (∗) vô nghiệm.
⋇ Nếu $x = \dfrac{-1}{5}$: Ta có (∗) nghiệm đúng.
Vậy (8.1) có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{-1}{5}\right\}$ □

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau
Bài 1) $x^3-15x^2+78x-141 = 5\sqrt[3]{2x-9}$ (1)
Bài 2) $2^{x-1}-2^{x^2-x} = (x-1)^2$ (2)
Bài 3) $\log_3(\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}) = 3x^2-8x+5$ (3)
Bài 4) $\sin 2x+\cos x = 1+\log_2\sin x$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ (4)
Bài 5) Chứng minh phương trình $\sqrt{x-\sqrt[3]{18}}+\sqrt{x-\sqrt{5}} = \sqrt{x-\sqrt{2}}$ (5) có nghiệm duy nhất.

PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Lý thuyết

Ta giải phương trình, hệ phương trình bằng bất đẳng thức dựa trên hai ý tưởng sau:

▶ 1) Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = g(x)$ mà

$\begin{cases} f(x) \geqslant a \\ g(x) \leqslant a \end{cases}$ hay $\begin{cases} f(x) \leqslant a \\ g(x) \geqslant a \end{cases}$ với a là hằng số.

Nghiệm của phương trình là các giá trị x thỏa mãn $f(x) = g(x) = a$.

▶ 2) Biến đổi phương trình về dạng $h(x) = m$ (m là hằng số) mà ta luôn có $h(x) \geqslant m$ hoặc $h(x) \leqslant m$ thì nghiệm của phương trình là các giá trị x làm cho dấu của đẳng thức xảy ra.

▶ Một số phương pháp hay được sử dụng là đưa về bình phương đúng, sử dụng tính đơn điệu của hàm số để đánh giá một cách hợp lý, sử dụng một số bất đẳng thức như bất đẳng thức AM-GM, BCS và bất đẳng thức Holder.

⁎ **Bất đẳng thức AM-GM :** $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}$, với $x_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

⁎ **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (BCS):** $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$$

⁎ **Bất đẳng thức Holder:** (dạng mở rộng của BCS): cho m bộ n số dương $(m, n \geqslant 2)$:

$$(a_{11}, a_{12,....,} a_{1n}) \ \ (a_{21}, a_{22,....,} a_{2n}) \ \ ; \ ....; (a_{m1}, a_{m2,....,} a_{mn})$$

Ta luôn có:

$$(a_{11}.a_{21}....a_{m1} + a_{12}.a_{22}....a_{m2} + ...a_{1n}.a_{2n}....a_{mn})^m$$
$$\leqslant ({a_{11}}^m + {a_{12}}^m + ... + {a_{1n}}^m)({a_{21}}^m + {a_{22}}^m + ... + {a_{2n}}^m)...({a_{m1}}^m + {a_{m2}}^m + ... + {a_{mn}}^m)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các bộ số tỷ lệ với nhau.

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải phương trình
$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy VT có bậc thấp hơn nên nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức BCS để chứng minh $VT \leqslant VP$.

Ở đây nếu để ý kỹ ta sẽ cần chọn điểm rơi sao cho xuất hiện $(16x - a)$ để từ đó có thể tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $x \geqslant 1$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$VT^2 = (\sqrt{13}.\sqrt{13x-13} + 3\sqrt{3}.\sqrt{3x+3})^2 \leqslant (13+27)(13x-13+3x+3) = 40(16x-10)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$40(16x-10) = 4.10.(16x-10) \leqslant 4.(\frac{10+16x-10}{2})^2 = (16x)^2 = VP^2$$

$\Rightarrow VT \leqslant VP$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{13x-13}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{3x+3}}{3\sqrt{3}} \\ 10 = 16x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Vậy phương trình vô nghiệm. □

⊛ Nhận xét: Ta cũng có bài toán tương tự:

Bài 1*: Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16$

Ta cùng xem qua ví dụ tiếp theo:

Bài 2: Giải phương trình $x^2+4x+5 = 2\sqrt{2x+3}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Như bài trên, do VT có bậc lớn hơn VP nên nhiều khả năng có thể dùng bất đẳng thức AM-GM.

⊛ Lời giải:

Điều kiện $x \geqslant \dfrac{-3}{2}$.

Từ phương trình, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$(2x+3)+1 \geqslant 2\sqrt{2x+3} = x^2+4x+5$$
$$\Rightarrow 2x+4 \geqslant x^2+4x+5 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (chọn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$ □.

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2-x+2$

Giải

⊛ Ý tưởng: Để ý rằng VT có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ nên ta nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức BCS để tìm giá trị lớn nhất. Rồi sau đó ta sẽ chứng minh VP lớn hơn hoặc bằng giá trị này.

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x-1 \geqslant 0 \\ -x^2+x+1 \geqslant 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS có:

$$VT \leqslant \sqrt{2(x^2+x-1-x^2+x+1)} = 2\sqrt{x}$$

Mặt khác:

$$VP - 2\sqrt{x} = x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = (x-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow VP \geqslant 2\sqrt{x} \geqslant VT$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1 = -x^2+x+1 \\ (x-1)^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thoả ĐKXĐ)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ □.

Bài 4: Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Giải

Đây là một bài toán trong kỳ thi vô địch toán cộng hòa Yugoslavia (Nam Tư) năm 1977, đa số các lời giải thực hiện phép biến đổi tương đương hoặc giải bằng phương pháp đưa về hệ phương trình.Sau đây là một lời giải khác sử dụng bất đẳng thức AM-GM:

Điều kiện $x \geqslant 1$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{(x - \frac{1}{x}).(1)} + \sqrt{(x-1).\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x} + 1 + x - 1 + \frac{1}{x}) = x$$

Vậy phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 1 \\ x - 1 = \frac{1}{x} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta tìm được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ □.

Bài 5: Giải phương trình $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = 3$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ở đây ta thấy rằng VT là tổng của các biểu thức có dạng $\sqrt[4]{A}$, còn VP là hằng số. Do đó ta nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng biểu thức ở VT để chứng minh $VT \leqslant VP$.
⊛ Lời giải:
Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 1$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{(1-x)(1+x)} \leqslant \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} \ (1) \\ \sqrt[4]{1+x} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{2} \ (2) \\ \sqrt[4]{1-x} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2} \ (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}\leqslant 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{2(1+x+1-x)}=2\Rightarrow VT\leqslant 1+2=3=VP$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=1+x\\1+x=1\\1-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ (thỏa)

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$ □.

Bài 6: Giải phương trình

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}=x^3+30$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Để ý ta thấy ngay phải áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}$ và $6x\sqrt{3x}$ và bất đẳng thức BCS cho $(\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x})$. Ở đây việc khó khăn chỉ là phải dùng AM-GM để $6x\sqrt{3x}$ nhỏ hơn hoặc bằng biểu thức dạng x^3+a sao cho phù hợp nhất .

⊛ Lời giải:

Điều kiện: $2\leqslant x\leqslant 4$

Ap dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}\leqslant\sqrt{\dfrac{x-2+4-x}{2}}=1\ (1)\\6x\sqrt{3x}=2\sqrt{27x^3}\leqslant x^3+27\ (2)\end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\leqslant\sqrt{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}\leqslant\sqrt{2.\sqrt{2(x-2+4-x)}}=2\ (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta có:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}\leqslant x^3+30\Leftrightarrow VT\leqslant VP$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=4-x\\x^3=27\\\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ (thỏa).

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$ □.

Bài 7: Giải phương trình $\sqrt[5]{27}x^{10}-5x^6+\sqrt[5]{864}=0$

Giải

⊛ Ý tưởng: Hệ số của đề bài khá xấu (để ý $\sqrt[5]{864} = 2\sqrt[5]{27}$) nên khó có thể biến đổi đẳng thức. Vậy ta sẽ cố gắng sử dụng bất đẳng thức để chứng minh $\sqrt[5]{27}x^{10} + \sqrt[5]{864} \geqslant 5x^6$.
Và để việc này dễ dàng hơn ta chia cả 2 vế của phương trình cho x^6.

⊛ Lời giải:
Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia 2 vế của phương trình cho x^6, viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt[5]{27}x^4 + \frac{2\sqrt[5]{27}}{x^6} = 5$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$$VT = \frac{\sqrt[5]{27}x^4}{3} + \frac{\sqrt[5]{27}x^4}{3} + \frac{\sqrt[5]{27}x^4}{3} + \frac{\sqrt[5]{27}}{x^6} + \frac{\sqrt[5]{27}}{x^6} \geqslant 5\sqrt[5]{\frac{\sqrt[5]{27^5}x^{12}}{3^3.x^{12}}} = 5 = VP$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt[5]{27}x^4}{3} = \dfrac{\sqrt[5]{27}}{x^6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[10]{3}$
Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt[10]{3}$ □.

Bài 8: Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Hướng đi của ta khi nhìn vào bài toán là đưa hết các biến sang một vế, từ đó dùng BCS một cách thích hợp. Để khử được x khi dùng BCS thì ta sẽ nhóm
x với $\sqrt{2-x^2}$ và $\dfrac{1}{x}$ với $\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}$.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $\begin{cases} 2 - x^2 \geqslant 0 \\ 2 - \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$
Phương trình đã cho tương đương với $x + \sqrt{2-x^2} + \dfrac{1}{x} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} = 4$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2-x^2})^2 \leqslant 2(x^2 + 2 - x^2) = 4 \\ (\dfrac{1}{x} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}})^2 \leqslant 2(\dfrac{1}{x^2} + 2 - \dfrac{1}{x^2}) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2-x^2} \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x} + \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}} \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x + \sqrt{2-x^2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} \leqslant 4$$

Dấu "=" xảy ra tại $x = 1$ (thỏa điều kiện).
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$ □.

Bài 9: Giải phương trình
$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$$

Giải

⋇ Ý tưởng: Dự đoán phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$, từ đó ta nghĩ tới dùng bất đẳng thức vì VT có nhiều căn thức phức tạp.

⊛ Lời giải:

Điều kiện $x \geqslant 1$ hoặc $x \leqslant \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{(x^2+2)(3x^2-1+x^2-x+x^2+1)}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}\ (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[5x^2-x+2(x^2+2)] \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x).2(x^2+2)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4) \geqslant \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)=\sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$ (thỏa điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$ □.

Bài 10: Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

Giải

Điều kiện: $0 \leqslant x \leqslant 1$

Để dễ dàng hơn trong việc đánh giá ta viết lại phương trình: $\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}=1+\dfrac{2x-1}{1+x^2}$

Nhận thấy $x=\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh nghiệm này là duy nhất:

* Nếu $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$, khi đó $\begin{cases} VT > 1 \\ VP < 1 \end{cases}$, phương trình vô nghiệm.

* Nếu $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$, khi đó $\begin{cases} VT < 1 \\ VP > 1 \end{cases}$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ □.

⋇ Nhận xét: lời giải trên khác với những bài trước, chúng ta không thể chứng minh $VT \geqslant VP$ hay $VT \leqslant VP$ nếu không chia trường hợp ra để xét. Do đó đối với những bài phương trình có sử dụng phương pháp đánh giá đòi hỏi ta phải biến đổi linh hoạt (nhìn qua thì có vẻ VP là hàm tăng còn VT là hàm giảm, nên nhiều khả năng PT có nghiệm duy nhất) . Kỹ thuật chia

trường hợp này cũng rất quan trọng trong giải hệ phương trình.

Bài 11: Giải phương trình
$$x^2+4x+5-\frac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

Giải

ĐK: $x\leqslant 1$.
Phương trình đã cho tương đương với:
$$(x+2)^2+\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$
hay
$$(x+2)^2=(1-x)\left(\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}-1\right)-\frac{(1-x)^2}{x^2+x+1}$$
Đặt $y=\sqrt{1-x}, z=\sqrt{x^2+x+1}$ $(y\geqslant 0, z\geqslant 0)$, phương trình trở thành:
$$(x+2)^2=y^2\left(\frac{2y}{z}-1\right)-\frac{y^4}{z^2}$$
Dễ thấy $VT\geqslant 0$. Ta có:
$$VP=y^2\left(\frac{2y}{z}-1\right)-\frac{y^4}{z^2}=y^2\left(-\frac{y^2}{z^2}+\frac{2y}{z}-1\right)=-y^2\left(\frac{y}{z}-1\right)^2\leqslant 0$$
Từ đó suy ra $VT\geqslant VP$ và phương trình tương đương với:
$$\begin{cases} x+2=0\\ y\left(\frac{y}{z}-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+2=0\\ y=0\vee y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=-2 \text{ (chọn)}$$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$ □

Bài 12: Giải phương trình
$$13\left[\left(x^2-3x+6\right)^2+(x^2-2x+7)^2\right]=(5x^2-12x+33)^2$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Để ý thấy rằng $13=2^2+3^2$ nên VT có dạng $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$, từ đó ta nghĩ tới việc sử dụng BCS để chứng minh $VT\geqslant VP$.
⊛ Lời giải:
Áp dụng bất đẳng thức BCS có:
$$\begin{aligned} VT&=(2^2+3^2)\left[\left(x^2-3x+6\right)^2+\left(x^2-2x+7\right)^2\right]\\ &\geqslant\left[2(x^2-3x+6)+3(x^2-2x+7)\right]^2=\left(5x^2-12x+33\right)^2=VP\end{aligned}$$
Đẳng thức xảy ra
$$\Leftrightarrow\frac{2}{x^2-3x+6}=\frac{3}{x^2-2x+7}\Leftrightarrow x=1\vee x=4$$
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;4\}$ □

Bài 13: Giải phương trình $x^{3000}+500x^3+1500x+1999=0$

Giải

Với $x > 0$, $VT > 0 = VP$ (vô lý) $\Rightarrow x \leqslant 0 \Rightarrow |x| = -x$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$$\begin{cases} x^{3000} + 2999 = x^{3000} + 1 + 1 + ... + 1 \geqslant 3000 \sqrt[3000]{x^{3000}.1.1...1} = 3000\,|x| = -3000x \ (1) \\ x^{3000} + 999 = x^{3000} + 1 + 1 + ... + 1 \geqslant 1000 \sqrt[1000]{x^{3000}.1.1...1} = 1000\,|x^3| = -1000x^3 \ (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) ta có:

$$2x^{3000} + 3998 \geqslant -(1000x^3 + 3000x)$$

$$\Rightarrow x^{3000} + 500x^3 + 1500x + 1999 \geqslant 0 \Rightarrow VT \geqslant VP$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^{3000} = 1 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$
Vậy phương trình có nghiệm $S = \{-1\}$ $\square$

Bài 14: Giải các phương trình sau:
a) $32x^4 + (4x-1)^4 = \dfrac{1}{27}$
b) $\dfrac{(1+x)^8 + 16x^4}{(1+x^2)^4} = \dfrac{1}{8}$

Giải

a) Ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau: $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant \dfrac{1}{27}(x+y+z)^4$
Thật vậy: $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant \dfrac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}(x+y+z)^2\right]^2 = \dfrac{1}{27}(x+y+z)^4$
$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geqslant \dfrac{1}{27}(x+y+z)^4$
Áp dụng ta có

$$32x^4 + (4x-1)^4 = (2x)^4 + (2x)^4 + (1-4x)^4 \geqslant \frac{1}{27}(2x + 2x + 1 - 4x) = \frac{1}{27}$$

Do đó phương trình trên tương đương $2x = 1 - 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{6}$ $\square$.

b) Ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau: $A^4 + B^4 \geqslant \dfrac{(A^2+B^2)^2}{2} \geqslant \dfrac{(A+B)^4}{8}$
Với $A = (x+1)^2$ và $B = -2x$ thì ta có:

$$\frac{(1+x)^8 + 16x^4}{(1+x^2)^4} \geqslant \frac{1}{8}.\frac{(1+x^2)^4}{(1+x^2)^4} = \frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x+1)^2 = -2x \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{3}$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2 + \sqrt{3}$ $\square$.

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt[4]{x^2-4x+5}=3+\sqrt{2}$
Bài 3: Giải phương trình $19^{\sqrt{x-1}}+5^{\sqrt[4]{x^2-1}}+95^{\sqrt[6]{x^2-3x+2}}=3$
Bài 4: Giải phương trình $x^2-3x+3.5=\sqrt{(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)}$
Bài 5: Giải phương trình $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}=\frac{x^2}{2}+3x-\frac{1}{2}$
Bài 6: Giải phương trình
$(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}})^x+(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}})^x=2^{x+1}$
Bài 7: Giải phương trình $8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$
Bài 8: Giải phương trình $\frac{1}{10}(3x^3+x^2+9x-7)=(x^2+2)^2+(x^3+3x-3)^2$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$

Giải

Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1}; b=\sqrt[3]{8+x-x^2}; c=\sqrt[3]{x^2-8x+1}$
Ta có hệ

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^3=8 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

• $a=-b\Rightarrow x=-1\vee x=9$
• $b=-c\Rightarrow x=1$
• $c=-a\Rightarrow x=0\vee x=1$
Vậy phương trình có nghiệm $S=\{-1;1;0;9\}$. □
⊛ Nhận xét: Ta có bài tương tự: $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$

Bài 2: Giải phương trình $5(30x^2-4x)=1336(\sqrt{30060x+1}+1)$

Giải

ĐKXĐ: $x\geqslant\frac{-1}{30060}$
Đặt $y=\frac{\sqrt{30060x+1}+1}{15}\Rightarrow 15y-1=\sqrt{30060x+1}\Rightarrow 15y^2-2y=2004x$
Mặt khác từ phương trình đầu ta có $30x^2-4x=4008y\Leftrightarrow 15x^2-2x=2004y$
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 15x^2-2x=2004y \\ 15y^2-2y=2004x \end{cases}$
Trừ vế theo vế ta có $(x-y)[15(x+y)+2002]=0$
• Với $x=y\Rightarrow 15x-1=\sqrt{30060x+1}$
$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{2006}{15}$

Với $x = 0$ thì phương trình đầu vô nghiệm.

• Với $15(x+y) + 2002 = 0$:

Ta có $30060x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{30060x+1}+1}{15} \geqslant \dfrac{1}{15}$

Nên $x + y \geqslant \dfrac{-1}{30060} + \dfrac{1}{15} > 0 \Rightarrow 15(x+y) + 2002 > 0$. Vậy trường hợp này loại.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2006}{15}$. □

Bài 3: Giải phương trình $4\sqrt{1-x} = x + 3 + 3\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2}$

Giải

Đặt $x = \cos t; t \in [0; \pi]$ ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&4\sqrt{1+\cos t} = \cos t + 3 + 3\sqrt{1-\cos t} + \sin t\\
&\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \cos t + 3 + 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\\
&\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 4 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2}\left(2\sqrt{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + 2\sin^2\frac{t}{2} - 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} - 4 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2}\left(2\sqrt{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - 2\sqrt{2}\right)\left(2\sin\frac{t}{2} + \sqrt{2}\right) = 0\\
&\left(\sin\frac{t}{2} - 2\sqrt{2}\right)\left(2\sin\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + \sqrt{2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} \\ \\ t = \dfrac{17}{6}\pi (l) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện của t, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 4: Giải phương trình $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2+21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$

Giải

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2 + 21) - (x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2+21} - (x^4 - 2x^2 + x) = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+21} > 0$ ta có phương trình

$$t^2 - (x^3 - 3x + 1)t - (x^4 - 2x^2 + x) = 0 \ (*)$$

(*) có $\Delta = (x^3 - 3x + 1)^2 + 4.(x^4 - 2x^2 + x) = x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x^3 - x + 1)^2$

nên có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = -x (1) \\ t = x^3 - 2x + 1 (2) \end{array}\right.$

Xét (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+21}=-x \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+21=x^2 \\ x<0 \end{array}\right. \text{(vô nghiệm)}$$

Xét (2) ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+21}=x^3-2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+21}-5=x^3-2x-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+21}+5}=(x-2)(x^2+2x+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}=x^2+2x+2 \ (3) \end{array}\right.$$

Xét (3) ta có: $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} \leqslant \left|\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right| < \left|\dfrac{x+2}{5}\right| < x^2+2x+2=VP$
Suy ra (3) vô nghiệm.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. □

Bài 5: Giải phương trình $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$

Giải

Do $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=x^2(x+1)^2+(1-x)^2>0\ \forall x$ nên điều kiện của x là $0<x<1$
Viết lại phương trình dưới dạng

$$x^2(x+1)^2+(1-x)^2=(x^2+1)\sqrt{x(x+1)(1-x)} \ (2)$$

Đặt $u=x(x+1); v=1-x \Rightarrow \begin{cases} u,v>0 \\ u+v=x^2+1 \end{cases}$
Khi đó (2) trở thành

$$u^2+v^2=(u+v)\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2(u+v+\sqrt{uv})=0 \Leftrightarrow u=v$$

Suy ra $x(x+1)=1-x \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$
Đối chiếu điều kiện chỉ có $x=-1+\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình. □

Bài 6: Giải phương trình $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$ (∗)

Giải

Đặt $u=6x+1; v=\sqrt{x^2+3}$ ta có:

$$VT(*)10x^2+3x+1=\frac{1}{4}(6x+1)^2+(x^2+3)-\frac{9}{4}=\frac{u^2}{4}+v^2-\frac{9}{4}$$

(*) trở thành:

$$\frac{1}{4}u^2+v^2-\frac{9}{4}=uv \Leftrightarrow (u-2v)^2=9 \Leftrightarrow u-2v=\pm 3$$

• Với $u-2v=3$

$\Rightarrow 1+6x-\sqrt{x^2+3}=3 \Leftrightarrow 3x-1=\sqrt{x^3+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1\geqslant 0 \\ x^2+3=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

• Với $u-2v=-3 \Rightarrow 3x+2=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2\geqslant 0 \\ (3x+2)^2=x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}-3}{4}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{\sqrt{7}-3}{4}\right\}$. □

Bài 7: Giải phương trình

$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}-\frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2}=5-\sqrt{2}\ (*)$$

Giải

Đặt $a=\dfrac{2x}{1+x^2}; b=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Ta tính được $\dfrac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2}=\sqrt{2}(3a-b+1)$ và $a^2+b^2=1$ nên (*) trở thành:

$$\begin{aligned}
&4ab-\sqrt{2}(3a-b+1)=5-\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow 4ab-\sqrt{2}(3a-b)=5=3+2a^2+2b^2\\
&\Leftrightarrow 2(a-b)^2+3-\sqrt{2}(a-3b)=0\\
&\Leftrightarrow 2(a-b)^2-\sqrt{2}[2(a-b)-(a+b)]+3=0\\
&\Leftrightarrow [\sqrt{2}(a-b)]^2-2\sqrt{2}(a-b)+1+\sqrt{2}(a+b+\sqrt{2})=0\\
&\Leftrightarrow [\sqrt{2}(a-b)-1]^2+\sqrt{2}(a+b+\sqrt{2})=0\ (**)
\end{aligned}$$

Ta cũng có $|a+b|\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}\Rightarrow a+b\geqslant-\sqrt{2}$

Vậy (**) có $VT\geqslant 0=VP$ và đẳng thức không xảy ra. Do đó phương trình (*) vô nghiệm. □

Bài 8: Giải phương trình $(4x^3-x+3)^3-x^3=\dfrac{3}{2}\ (*)$

Giải

Đặt $t=4x^3-x+3=t\Rightarrow 3=t-4x^3+x$

Phương trình (*) trở thành:

$$\begin{aligned}
&t^3-x^3=\frac{t-4x^3+x}{2}\Leftrightarrow 2t^3+2x^3-t-x=0\\
&\Leftrightarrow (t+x)(2t^2-2tx+2x^2-1)=0\Leftrightarrow t+x=0
\end{aligned}$$

Từ đó tìm được $x=\sqrt[3]{\dfrac{-3}{4}}$. □

Chương IV: PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LOGARIT

Bài viết này sẽ giới thiệu đến các bạn một số Phương pháp giải phương trình mũ - Logarit, với mong muốn ít nhiều sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích cho bạn đọc, qua đó chuẩn bị hành trang cho các bạn học sinh trong các kỳ thi tuyển sinh vào Đại học.

LÝ THUYẾT

Cho phương trình $a^x = m \ \ (a > 0, a \neq 1)$, ta có:

- Nếu $m > 0$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = \log_a m$.
- Nếu $m \leqslant 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Hàm số logarit:

- $a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b$.
- $a^{\log_a b} = b$.
- $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.
- $\log_a b^\alpha = \alpha.\log_a b$.
- $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.
- $\log_b c = \log_b a.\log_a c$.
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
- $\log_{a^\alpha} c = \dfrac{1}{\alpha}.\log_a c$.

Sau đây là một số phương pháp giải phương trình mũ - logarit.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp đặt ẩn phụ là một phương pháp khá phổ biến đối với các bài toán phương trình và hệ phương trình. Các bài toán giải phương trình mà ta có thể áp dụng phương pháp này, nếu dễ, thì ta sẽ thấy ngay dấu hiệu là một biểu thức chứa biến nào đó lặp đi lặp lại nhiều lần, còn nếu khó hơn, thì ta cần phải có một ít biến đổi khéo léo, chủ yếu là để đưa về hình dạng sơ khai của bài toán, là một phương trình với các biểu thức chứa biến lặp lại. Cũng có trường hợp, bài toán yêu cầu ta phải đặt thêm nhiều ẩn phụ khác, nhằm tạo ra một phương

trình hoặc một hệ phương trình mới dễ dàng giải quyết hơn. Sau đây, chúng ta hãy cùng nhau xét các ví dụ nhỏ nhằm làm sáng tỏ hơn ý tưởng giải quyết các bài toán dạng này.

Bài 1. Giải phương trình $2^{x^2-x}+2^{2+x-x^2}=3$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta nhận thấy rằng biểu thức x^2-x được lặp lại trong phương trình trên. Vì thế, ta sẽ có ngay ý tưởng là phải đặt một ẩn mới thay thế cho biểu thức này.
⊛ Lời giải:
Đặt $t=x^2-x$, phương trình đã cho trở thành:

$$2^t+2^{2-t}=3\Leftrightarrow 2^t+4.\frac{1}{2^t}=3\Leftrightarrow (2^t)^2+4=3.2^t$$

Đến đây, ta lại thấy phương trình thu được có biểu thức 2^t được lặp lại, vậy ta sẽ đặt thêm một ẩn mới.
Đặt $u=2^t$, ta được : $u^2-3u+4=0$. Phương trình này vô nghiệm.
Do đó, ta có phương trình đã cho vô nghiệm □

Bài 2. Giải phương trình $\log_2 x+\sqrt{10\log_2 x+6}=9$

Giải

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình được viết lại thành:

$$t+\sqrt{10t+6}=9\Leftrightarrow\begin{cases} t\leqslant 9\\ 10t+6=t^2-18t+81\end{cases}\Leftrightarrow t=3\Rightarrow x=8$$

Vậy phương trình đã cho có một nhiệm duy nhất $x=8$ □
⊛ Nhận xét: Ở hai bài toán trên, biểu thức lặp lại đã được "phơi bày" ra trước mắt, và chúng ta dễ dàng nhận biết được phương pháp đặt ẩn phụ đối với bài toán. Những bài toán sau đây, các biểu thức chứa biến lặp lại sẽ bị giấu đi, từ đơn giản, đến tinh xảo, và độ khó của việc tìm ra quy tắc "bí ẩn" đấy, cũng là nấc thang để quyết định mức độ khó của bài toán.

Bài 3. Giải phương trình $3^{4x+8}-4.3^{2x+5}+27=0\quad(*)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Với bài toán này, ta nhận thấy rằng các hạng tử trong phương trình đều có lũy thừa của 3, do đó, đầu tiên ta sẽ triệt tiêu các lũy thừa này.
⊛ Lời giải:
Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 3^{4x+8}-4.3^{2x+5}+3^3=0\Leftrightarrow 3^{4x+5}-4.3^{2x+2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 3.3^{4x+4}-4.3^{2x+2}+1=0$$

Đến đây, ta dễ dàng có được cách đặt ẩn phù hợp.
Đặt $t = 3^{2x+2} > 0$. Phương trình đã cho trở thành:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{2x+2} = 1 \\ 3^{2x+2} = 3^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{-1; -\dfrac{3}{2}\right\}$ □

Ta sẽ luyện tập thêm với bài toán tiếp theo.

Bài 4. Giải phương trình $2^{2x+6} + 2^{x+7} - 17 = 0 \quad (*)$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2^{2x+6} + 16.2^{x+3} - 17 = 0$$

Đặt $t = 2^{x+3} > 0$, ta có:

$$t^2 + 16t - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -17 \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \Rightarrow 2^{x+3} = 1 \Leftrightarrow x = -3$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3\}$ □

Bài 5. Giải phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4 \quad (*)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Với bài toán này, để ý rằng $\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$. Ta sẽ nhân lượng liên hợp để làm xuất hiện biểu thức chung.
⊛ Lời giải:
Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x + \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x} = 4$$

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0$. Phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 2+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 1$ □

Bài 6. Giải phương trình $2.16^x - 15.4^x - 8 = 0$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta chú ý rằng $16^x = (4^x)^2$, do đó, ta đã định hướng được ngay phương pháp đặt ẩn phụ.

⊛ Lời giải:

Đặt $t = 4^x > 0$, ta có:

$$2t^2 - 15t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -\dfrac{1}{2} \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \Rightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{2}$ □

Bài 7. Giải phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x + 16\left(3-\sqrt{5}\right)^x = 2^{x+3} \quad (*)$

Giải

⊛ Ý tưởng: Với bài toán này, ý tưởng đầu tiên chính là nhân lượng liên hợp cho $(3-\sqrt{5})$. Thế nhưng, ở vế phải của phương trình bây giờ là 2^{x+3}, do đó, ta cần phải biến đổi phương trình làm sao cho mất đi biến x ở hạng tử 2^{x+3}.

⊛ Lời giải:

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + 16.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$$

Đến đây, ta sẽ dùng lượng liên hợp như bình thường.

Đặt $t = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{t} = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x$. Ta có:

$$t + \frac{16}{t} = 8 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow x.\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln\left(3+\sqrt{5}\right) - \ln 2}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{\ln 4}{\ln\left(3+\sqrt{5}\right) - \ln 2}$ □

Bài 8. Giải phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x - 3\left(2-\sqrt{3}\right)^x + 2 = 0$

Giải

Viết lại phương trình:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x} - 3\left(2-\sqrt{3}\right)^x + 2 = 0$$

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{t} = \left(2-\sqrt{3}\right)^x$. Ta có:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 - t + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$ □

Bài 9. Giải phương trình $2.4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Bài toán này yêu cầu chúng ra cần phải biến đổi một hợp lý để tạo ra biểu thức thích hợp cho việc đặt ẩn phụ.

⊛ Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>0$, ta có:

$$2+t=t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \quad (\text{loại}) \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=2 \Rightarrow \frac{1}{x}.\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2 \Leftrightarrow x=\log_2 3-1$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=\log_2 3-1$ □

Bài 10. Giải phương trình $3.16^x+2.81^x=5.36^x$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$3+2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}=5\left(\frac{9}{4}\right)^{x}$$

Đặt $t=\left(\frac{9}{4}\right)^{x}>0$. Phương trình trở thành:

$$3+2t^2=5t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$ □

Bài 11. Giải phương trình $125^x+50^x=2^{3x+1}$

Giải

Phương trình tương đương với $\left(\frac{125}{8}\right)^x+\left(\frac{50}{8}\right)^x=2$.

Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^x>0$. Ta có:

$$t^3+t^2-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$ □

Bài 12. Giải phương trình $\frac{1}{4-\log x}+\frac{2}{2+\log x}=1$

Giải

Đặt $t = \log x$, suy ra $\begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq -2 \end{cases}$. Phương trình trở thành

$$\frac{1}{4-t} + \frac{2}{2+t} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 100 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 10$ và $x = 100$ □

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{1 + \log_{0.04} x} + \sqrt{3 + \log_{0.2} x} = 1$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đối với các biểu thức $\log_a f(x)$ với $a > 0$, thì điều kiện để hàm logarit này tồn tại là $f(x) > 0$. Khi tiến hành giải các bài toán phương trình logarit, ta phải đặc biệt chú ý đến điều kiện xác định của bài toán.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $\log_{0.2} x \geqslant -2$, $x > 0$.
Đặt $t = \log_{0.2} x \Rightarrow t \geqslant -2$. Ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}t} + \sqrt{3 + t} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 3} = -3 - \frac{3}{2}t$$

Do $t \geqslant -1$ nên $-3 - \dfrac{3}{2}t \leqslant 0$, suy ra $t = -2$, hay $x = 25$ □

Bài 14. Giải phương trình $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

Giải

Ta nhận thấy rằng $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
Với một số biến đổi nhỏ, phương trình tương đương với:

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3$$

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \end{cases}$. Ta có:

$$\frac{2}{t} + \frac{6}{t+1} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2^{-1/3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{4; 2^{1/3}\right\}$ □

Bài 15. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_{1+x}(1 - 2y + y^2) + \log_{1-y}(1 + 2x + x^2) = 4 & (1) \\ \log_{1+x}(1 + 2y) + \log_{1-2y}(1 + 2x) = 2 & (2) \end{cases}$$

(ĐH Quốc gia TP HCM)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 1 - y \neq 1 \\ 0 < 1 + x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y < 1 \end{cases}$.

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{x+1}(1-y)^2 + \log_{1-y}(1+x)^2 = 4 \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y) + \log_{1-y}(1+x) = 2 \quad (3)$$

Đặt $t = \log_{1+x}(1-y)$, suy ra $\log_{1-y}(1+x) = \frac{1}{t}$. Phương trình (3) trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra

$$\log_{1+x}(1-y) = 1 \Leftrightarrow 1 - y = 1 + x \Leftrightarrow x = -y$$

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\log_{1+x}(1-2x) + \log_{1+x}(1+2x) = 2 \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-4x^2) = 2$$

$$\Rightarrow 1 - 4x^2 = (1+x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (\text{loại}) \\ x = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$$

Suy ra $y = \frac{2}{5}$.

Thử lại nghiệm nhận được vào hệ phương trình ban đầu, ta có được nghiệm $\left(-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right)$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho □

Bài 16. Giải phương trình $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$

Giải

Đặt $t = \log_3(3^x - 1)$, phương trình được viết lại:

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(3^x - 1) = 2 \\ \log_3(3^x - 1) = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 10 \\ x = \log_3 28 - 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \log_3 10$ và $x = \log_3 28 - 3$ □

Bài 17. Giải phương trình $\log_4(x - \sqrt{x^2 - 1}).\log_5(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_{20}(x - \sqrt{x^2 - 1})$

Giải

Đặt $t = x - \sqrt{x^2 - 1}$, suy ra $x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_4 t.\log_5 \frac{1}{t} = \log_{20} t \Leftrightarrow -\log_4 t.\log_5 t = \log_{20} 4.\log_4 t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 t = 0 \\ \log_5 t = -\log_{20} 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 5^{-\log_{20} 4} \end{array}\right. .$$

★ Với $t = 1$ suy ra $x = 1$.

★ Với $t = 5^{-\log_{20} 4}$ suy ra $\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = 5^{-\log_{20} 4} \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 5^{\log_{20} 4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(5^{-\log_{20} 4} + 5^{\log_{20} 4}\right)$

Thử lại các giá trị nhận được, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{2}\left(5^{-\log_{20} 4} + 5^{\log_{20} 4}\right)$ □

Bài 18. Giải phương trình $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$

Giải

Nghiệm của phương trình (nếu có) phải thỏa mãn điều kiện xác định $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geqslant 0 \\ x^2 + 7x + 12 \geqslant 0 \end{cases}$

Phương trình tương đương với

$$\log_2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = \log_2 24 \Leftrightarrow x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, ta thu được $t(t+2) = 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -6 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 4 = -6 \\ x^2 + 5x + 4 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right.$.

Nhận thấy các giá trị này thỏa mãn tập xác định ban đầu. Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -5$ □

Qua các bài toán trên, chúng ta rút ra được một số kinh nghiệm và một số điều đáng lưu ý khi giải phương trình mũ - logarit:

∗ Lưu ý đến điều kiện xác định của bài toán đưa ra. Các điều kiện này có thể giúp ta chặn được miền nghiệm trên phương trình hệ quả, giúp ta thu được nghiệm chính xác hơn. Còn nếu như chúng ta không xác định điều kiện bài toán, thì sau khi giải quyết xong, chúng ta cần một bước không thể bỏ qua là thử lại nghiệm vào bài toán.

∗ Để có được các bước biến đổi mưu mẹo trong các bài toán phương trình như trên, đòi hỏi chúng ta phải có kinh nghiệm làm bài, luyện tập với nhiều dạng bài tập khác nhau. Và để giúp cho các bạn luyện tập nhiều hơn với phương pháp này, chúng tôi xin đề nghị với các bạn thử luyện tập với một số bài tập tự luyện sau đây:

Bài tập tự luyện:

1/ $4^{3+2\cos x} - 7.4^{1+\cos x} - 2 = 0$.

2/ $\log_2^2 x.\log_x(4x^2) = 12$.

3/ $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$.

4/ $(2 - \log_3 x)\log_{9x} 3 - \dfrac{4}{1 - \log_3 x} = 1$.

5/ $2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$.

6/ $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = \dfrac{5}{2}$.

7/ $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

8/ $7^{\log_{25}^2(5x) - 1} - x^{\log_5 7} = 0$.

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

Bài 1. Giải phương trình $2^{2x-1}+3^{2x}=5^{2x+1}=2^x+3^{x+1}+5^{x+2}$

Giải

Nhìn vào bài toán này, chúng ta sẽ thấy ngay rằng phương pháp đặt ẩn phụ có vẻ như không có tác dụng. Chúng ta sẽ có những nhận xét sau đây:
∗ Nếu $x>1$ thì $2^{2x-1}+3^{2x}=5^{2x+1}>2^x+3^{x+1}+5^{x+2}$
∗ Nếu $x<1$ thì $2^{2x-1}+3^{2x}=5^{2x+1}<2^x+3^{x+1}+5^{x+2}$
∗ Nếu $x=1$ thì $2^{2x-1}+3^{2x}=5^{2x+1}=2^x+3^{x+1}+5^{x+2}(=136)$.
Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x=1$ □

Bài 2. Giải phương trình $3^{2x}+4^{2x}=2.12^x$

Giải

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có: $3^{2x}+4^{2x}\geqslant 2.12^x$. Dấu đẳng thức xảy ra, do đó: $3^x=4^x$.
∗ Nếu $x>0$: $3^x<4^x$.
∗ Nếu $x<0$: $3^x>4^x$.
∗ Nếu $x=0$: $3^x=4^x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$ □

Bài 3. Giải phương trình $x+\log(x^2-x-6)=4+\log(x+2)$

Giải

Phương trình trở thành:

$$x+\log(x+2)+\log(x-3)=1+\log(x+2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\ \log(x-3)=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\ \log(x-3)=4-x\end{cases}$$

∗ Nếu $x>4$ thì $\log(x-3)>\log 1=0>4-x$.
∗ Nếu $3<x<4$ thì $\log(x-3)<\log 1=0<4-x$.
∗ Nếu $x=4$ thì $\log(x-3)=\log 1=0=4-x$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$ □

Bài 4. Giải phương trình $(1+2^x)(1+3^x)(1+36^x)=(1+6^x)^3$

Giải

Ta có BĐT sau:

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant(1+\sqrt[3]{xyz})^3,\quad \forall x,y,z>0$$

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$$(1+2^x)(1+3^x)(1+36^x)\geqslant(1+\sqrt[3]{2^x3^x36^x})=(1+6^x)^3$$

Dấu đẳng thức xảy ra, do đó $2^x = 3^x = 36^x \Rightarrow x = 0$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ □

Bài 5. Giải phương trình $x = 2^{\log_5(x+3)}$

Giải

ĐKXĐ: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Đặt $t = \log_5(x + 3) \Rightarrow x = 5^t - 3$. Ta có:

$$5^t - 3 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^t - 3\left(\frac{1}{2}\right)^t = 1$$

$*$ Nếu $t > 1$ thì $\left(\frac{5}{3}\right)^t - 3\left(\frac{1}{2}\right)^t > \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.
$*$ Nếu $t < 1$ thì $\left(\frac{5}{3}\right)^t - 3\left(\frac{1}{2}\right)^t < \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.
$*$ Nếu $t = 1$ thì $\left(\frac{5}{3}\right)^t - 3\left(\frac{1}{2}\right)^t = 1$.
Do đó $t = 1$, hay $x = 2$ (nhận).
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 2$ □
⊛ Nhận xét: Với các bài toán trên, có thể thấy được những bước biến đổi rất kinh điển của phương pháp đánh giá BĐT. Còn ở những bài toán sau đây, các bạn cần phải có sự kết hợp khéo léo giữa các BĐT và việc xét tính đơn điệu của hàm số.

Bài 6. Giải phương trình $x.2^x = x(3 - x) + 2(2^x - 1)$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-2)(2^x + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \quad (\text{nhận}) \\ 2^x + x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình $2^x + x - 1 = 0$. Đặt $f(x) = 2^x + x - 1$.
Ta có $f'(x) = \ln 2.2^x + 1 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.
Nhận thấy $x = 0$ thỏa phương trình này, do đó, phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = 0$ □
⊛ Qua bài toán này, ta rút ra được một điều: Đối với việc giải phương trình $2^x + x - 1 = 0$ như trên, ta có thể suy ra được điều kiện là $x > 1$. Thế nhưng điều này là không nhất thiết cần thiết, vì trong một số trường hợp, việc giải điều kiện hệ quả đó là khá rắc rối. Một cách đơn giản hơn ta có thể làm là tìm ra các nghiệm của phương trình đã cho, sau đó thay vào lại phương trình ban đầu để nhận những nghiệm thỏa mãn. Nhưng lại trong nhiều trường hợp khác, những điều kiện hệ quả lại tỏ ra rất hữu hiệu cho việc giải phương trình như chặn miền nghiệm, sử dụng BĐT, xét dấu, tính đơn điệu, ...v.v...

Bài 7. Giải phương trình $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \frac{2x+1}{(x-1)^2}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x>-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Phương trình được viết lại thành:

$$\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)+2\left(x+\frac{1}{2}\right)=\log_2(x-1)^2+2(x-1)^2(*)$$

Đặt $f(x)=\log_2 x+2x$ với $x>0$. Ta có: $f'(x)=2+\dfrac{1}{x.\ln 2}>0\ \ \forall x>0$.

Do đó, hàm f đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lại từ $(*)$, ta có $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left((x-1)^2\right)$, suy ra:

$$x+\frac{1}{2}=(x-1)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right\}$ □

Bài 8. Giải phương trình $(1+x)(2+4^x)=3.4^x$

Giải

Dễ có $x>-1$. Xét hàm số $f(x)=(1+x)(2+4^x)-3.4^x$ với $x\in(-1;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=(x-2)4^x\ln 4+4^x+2$, $f''(x)=(x-4)(\ln 4)^2+2.4^x\ln 4$, $f'''(x)=(x-2)4^x(\ln 4)^3+3.4^x(\ln 4)^2$.

$f'''(x)=0\Leftrightarrow x=2-\dfrac{3}{\ln 4}$. Đặt $x_0=2-\dfrac{3}{\ln 4}$.

Ta thấy hàm $f''(x)$ nghịch biến trên $(-1;x_0)$, đồng biến trên $(x_0;+\infty)$ và $f''(-1)<0$, $f''(x_0)<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$, nên phương trình $f''(x)=0$ có đúng 1 nghiệm. Do đó, phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm, suy ra phương trình $f(x)=0$ có không quá 3 nghiệm.

Ta nhận thấy có ba giá trị x thỏa mãn phương trình đã cho là $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}$ □

Bài 9. Giải phương trình $12^x+13^x+14^x=2^x+3^x+4^x+870^x-2400x^2+1560x$

Giải

Xét hàm số $f(x)=12^x+13^x+14^x-(2^x+3^x+4^x+870^x-2400x^2+1560x)$.

Ta sẽ chứng minh đạo hàm cấp 4 của hàm số này luôn âm hoặc luôn dương với mọi giá trị x có thể nhận được. Ta có:

$$f^{(4)}(x)=12^x(\ln 12)^4+13^x(\ln 13)^4+14^x(\ln 14)^4-2^x(\ln 2)^4-3^x(\ln 3)^4-4^x(\ln 4)^4$$

Ta xét các trường hợp sau:

$*$ Nếu $x<0$, áp dụng BĐT Bernoulli cho số $x<0$, ta có $12^x>x(12-1)+1=11x+1$. Tương tự, ta cũng có $13^x>12x+1$, $14^x>13x+1$. Suy ra:

$$12^x+13^x+14^x>36x+3$$

Lại có

$$2^x+3^x+4^x+870^x-2400x^2+1560x<3+36x+x(870x^2-2400x+1524)<36x+3$$

Do đó

$$12^x+13^x+14^x>2^x+3^x+4^x+870^x-2400x^2+1560x$$

Điều này mâu thuẫn với đề bài đã cho.
* Nếu $x \geqslant 0$, suy ra $f^{(4)} \geqslant 0$, do đó phương trình đã cho không có quá 4 nghiệm.
Nhận thấy các giá trị $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ thỏa mãn phương trình đã cho.
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0;1;2;3\}$ □

Bài 10. Giải phương trình $9^x(3^x+2^x)=2^x(8^x+7^x)+5^x(5^x-2^x)$

Giải

Ta có nhận xét rằng, với bài toán trên, ta không thấy các cơ số có mối liên quan nào đến nhau, các hàm số chứa biến thì toàn là hàm số mũ. Ta thử biến đổi về dạng phương trình có lợi $f(a)=f(b)$. Ta có:

$$9^x(3^x+2^x)=2^x(8^x+7^x)+5^x(5^x-2^x)$$
$$\Leftrightarrow 10^x+12^x-16^x-25^x=12^x+14^x-18^x-27^x$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^x+(t+2)^x-(t+6)^x-(t+15)^x$ với $t>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$f(10)=f(12)$$

Ta thấy rằng, hàm f liên tục và khả đạo hàm trên $[10;12]$, nên theo định lý Largrange, tồn tại $c\in(10;12)$ sao cho $f'(c)=\dfrac{f(10)-f(12)}{10-12}=0$. Do đó, ta có:

$$x\left[c^{x-1}+(c+2)^{x-1}-(c+6)^{x-1}-(c+15)^{x-1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0 \\ c^{x-1}+(c+2)^{x-1}=(c+6)^{x-1}+(c+15)^{x-1}\end{array}\right.$$

Xét phương trình $c^{x-1}+(c+2)^{x-1}=(c+6)^{x-1}+(c+15)^{x-1}$. Ta có:
* Nếu $x>1$ thì $x-1>0$, suy ra $c^{x-1}+(c+2)^{x-1}<(c+6)^{x-1}+(c+15)^{x-1}$.
* Nếu $x<1$ thì $x-1<0$, suy ra $c^{x-1}+(c+2)^{x-1}>(c+6)^{x-1}+(c+15)^{x-1}$.
* Nếu $x=1$ thì $c^{x-1}+(c+2)^{x-1}=(c+6)^{x-1}+(c+15)^{x-1}=2$.
Thử lại, ta có phương trình này có tập nghiệm là $S=\{0;1\}$ □

Qua các bài tập ví dụ nêu trên, các bạn sẽ thấy rằng, người ra đề sẽ thường hay bắt đầu tạo ra bài toán từ một hằng đẳng thức, từ một phương trình đơn giản, hay từ trường hợp xảy ra dấu bằng của một bất đẳng nào đó. Họ càng cố công cất giấu biểu thức ban đầu bao nhiêu, thì mức độ khó của bài toán cũng theo đó mà khó lên bấy nhiêu. Và công việc của chúng ta là tìm ra con đường mà người ra đề đã sử dụng. Có thể có bài toán, chúng ta đi theo một hướng khác tác giả, nhưng đối với một số bài toán, dường như là con đường tác giả xuất phát cũng là con đường duy nhất mà ta có thể sử dụng để giải quyết được bài toán. Để nhuần nhuyễn hơn, các bạn hãy luyện tập với các bài toán sau đây:

Bài tập tự luyện

Giải các phương trình sau:
1/ $2^{\sqrt{3-x}} = -x^2 + 8x - 14$.
2/ $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \dfrac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)}$.
3/ $(x+3)\log_3^2(x+2) + 4(x+2)\log_3(x+2) = 16$.
4/ $e^x + (x^3 - x)\ln(x^2+1) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC

Bản chất của phương pháp biến đổi đẳng thức là cố gắng chuyển đổi phương trình đã cho trở thành một phương trình tương đương, một phương trình hệ quả, hay một hệ phương trình, hệ bất phương trình mà ta có thể dễ dàng giải quyết. Thông thường, ta sẽ biến đổi đề bài về dạng hai vế có cùng cơ số hoặc trở thành một hằng đẳng thức quen thuộc. Chúng ta sẽ làm rõ hơn những điều trên bằng cách xét qua các ví dụ sau đây.

Bài 1. Giải phương trình $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta có một nhận xét khá thú vị: 4 là lũy thừa bậc hai của 2. Do đó, ta sẽ biến đổi cả hai vế về cùng cơ số 2.
⊛ Lời giải:
Phương trình đã cho tương đương với:

$$2^{x^2-x+8} = 2^{2-6x} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 2 - 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-2; -3\}$ □

Bài 2. Giải phương trình $(x^2 - x + 1)^{x^2-1} = 1$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \\ (x^2 - x + 1 - 1)(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 - x)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1; 0; 1\}$ □
⊛ Nhận xét: Đối với phương trình có dạng $f(x)^{g(x)} = 1$, đầu tiên, ta có điều kiện là $f(x) > 0$. Tiếp đến, để biểu thức $f(x)^{g(x)}$ bằng 1, thì hoặc $f(x) = 1$, hoặc $g(x) = 0$, do đó, ta suy ra phương trình $[f(x) - 1]g(x) = 0$. Vậy, phương trình đã cho sẽ tương đương với $\begin{cases} f(x) > 0 \\ [f(x) - 1]g(x) = 0 \end{cases}$.

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$

Giải

Hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y \\ y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $\{(x; y)\} = \{(0; 1); (2; 4)\}$□

Bài 4. Giải phương trình $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta có ngay nhận xét là biểu thức lũy thừa chứa x giống nhau ở cả hai vế của phương trình. Do đó, ta sẽ có ý tưởng là rút ra phần tử chung của mỗi hai vế.

⊛ Lời giải:

Phương trình đã cho trở thành:

$$2^x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3^x\left(1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^x.\frac{7}{4} = 3^x.\frac{7}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$ □

Bài 5. Giải phương trình $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

Giải

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

Phương trình tương đương với:

$$5^x.2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{\frac{3-x}{x}} \Leftrightarrow 5^{x-3} = (2^{-\frac{1}{x}})^{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-3} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right)^{x-3} \Leftrightarrow (5.2^{\frac{1}{x}})^{x-3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x - 3 = 0 \\ 5.2^{\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 3 \\ x = -\log_5 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{3; -\log_5 2\}$ □

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (*) \end{cases}$

Giải

Điều kiện xác định: $y > x; y > 0$. Ta có biến đổi sau:

$$\log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\log_4 \frac{y-x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y}{4}$$

Thế vào phương trình (*) ta được:

$$\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

Từ điều kiện đề bài, ta có $y = 4$, suy ra $x = 3$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$ □

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{2^x.\sqrt[3]{4^x}.\sqrt[3x]{0.125}} = 4\sqrt[3]{2}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Chúng ta cần chú ý rằng, nếu trong bài toán có căn thức dạng $\sqrt[x]{\ }$ thì cần phải có điều kiện của x là $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3} \\ 3x \in \mathbb{N} \end{cases}$. Nhận thấy rằng các cơ số của các lũy thừa đều là lũy thừa của 2, do đó ta sẽ biến đổi bài toán về dạng các lũy thừa của 2.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{2^x.2^{\frac{2x}{3}}.2^{-\frac{1}{2x}}} = 2^2.2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta có phương trình này có một nghiệm duy nhất $x = 3$ □

Bài 8. Giải phương trình $\dfrac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{3}}(x+1) + \dfrac{1}{503}\log_{81}(x-3)^{2012} = 5\log_{243}[4(x-2)]$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhìn vào đề bài, ta thấy ngay rằng cơ số của các hàm logarit đều là lũy thừa của 3. Do đó, ta sẽ biến đổi chúng về dạng các hàm số logarit cơ số 3.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $x > 2$, $x \neq 3$.

Phương trình tương đương với

$$\log_3(x+1) + \log_3|x-3| = \log_3(4x-8) \Leftrightarrow (x+1)|x-3| = (4x-8)$$

∗ Nếu $x > 3$, ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = 4x - 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \text{(loại)} \\ x = 5 \end{array}\right.$$

∗ Nếu $2 < x < 3$, ta có:

$$-x^2 + 2x + 3 = 4x - 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{12} \\ x = -1 - \sqrt{12} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{5; -1 + \sqrt{12}\right\}$ □

Và để cho kinh nghiệm làm bài được củng cố thêm, các bạn hãy thử tự giải các bài toán tự luyện sau:

Bài tập tự luyện.

Giải các phương trình:

1/ $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} = 12$.

2/ $(x^2 - 2x + 2)^{\sqrt{4-x^2}} = 1$.

3/ $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Sau đây, chúng ta sẽ cùng nhau thử sức mình với những bài toán khó hơn và hay hơn. Các bài toán này đòi hỏi sự vận dụng linh hoạt các kỹ năng biến đổi, đặt ẩn phụ, cũng như xét đến tính đơn điệu của các hàm số phụ cần dùng đến.

Bài 1. $3x^2 + 1 + \log_{2006} \dfrac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6$

Giải

Viết lại phương trình:

$$\log_{2006} \frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6 - 3x^2 - 1$$

Lưu ý rằng $(x^6 + x^2 + 1) - (4x^2 + 2) = (x^6 - 3x^2 - 1)$.

Đặt $a = 4x^2 + 2 \geqslant 2$, $b = x^6 + x^2 + 1 \geqslant 1$, phương trình đã cho trở thành:

$$\log_{2006} a + a = \log_{2006} b + b \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_{2006} x + x$ với $x > 0$, ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2006} + 1 > 0 \;\; \forall x > 0$, lại do hàm f liên tục trên $(0; +\infty)$, nên từ (*) suy ra $a = b$. Ta cần phải giải phương trình:

$$x^6 - 3x^2 - 1 = 0$$

Đặt $u = x^2 \geqslant 0$. Phương trình được viết lại: $u^3 - 3u - 1 = 0$.

Đặt $u = 2v \Rightarrow v \geqslant 0$, ta có $4v^3 - 3v = \dfrac{1}{2}$.

Xét $g(v) = 4v^3 - 3v$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \pm\dfrac{1}{2}$.

Ta có $g(0) = 0$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$, $g(1) = 1$, do đó, phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất $v_0 > 0$, với $v_0 < 1$. Đặt $v = \cos t$ với $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, phương trình trở thành:

$$\cos 3t = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \cos\frac{\pi}{9} \Rightarrow u = 2\cos\frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}; -\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}\right\}$ □

Bài 2. $\sin^2 x.2^{\cos 2x} + \dfrac{1}{2}\sin^2 2x + \cos 2x = 1$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}.2^{\cos 2x}+\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)+\cos 2x=1$$

Đặt $t=\cos 2x$, ta có:

$$(1-t)2^t+1-t^2+2t=2 \Leftrightarrow (1-t)(2^t+t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2^t+t-1=0 \end{array}\right.$$

$*$ Với $t=1$, suy ra $x=k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.
$*$ Xét phương trình $f(t)=2^t+t-1=0$.
Ta có hàm f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ nên $f(t)=0$ có nhiều nhất một nghiệm, lại do $f(0)=0$, nên suy ra $t=0$ là nghiệm của phương trình $f(t)=0$, suy ra $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ với $k\in\mathbb{Z}$.
Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$ □

Bài 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 7^{1+x-y}+3^{1+x-y}+7^{1-x+y}=10^{1+x-y}+10^{1-x+y} & (1) \\ 4x^2+\sqrt{2x+3}=8y+1 & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $x\geqslant -\frac{3}{2}, y>-\frac{1}{8}$.
Ta có bổ đề sau: Với mọi $a>b>1 \Rightarrow a^x+a^{-x}\geqslant b^x+b^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}$ (3), dấu đẳng thức xảy ra khi $x=0$. Thật vậy, bất đẳng thức (3) tương đương với:

$$(a^x-b^x)\left(1-\frac{1}{a^xb^x}\right)\geqslant 0 \quad (4)$$

- Nếu $x\geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} a^x\geqslant b^x \\ (ab)^x\geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow (a^x-b^x)\left(1-\frac{1}{a^xb^x}\right)\geqslant 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=0$.
- Nếu $x\leqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} a^x\leqslant b^x \\ (ab)^x\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow a^x-b^x)\left(1-\frac{1}{a^xb^x}\right)\geqslant 0$. Dấu đẳng tức xảy ra khi $x=0$.

Áp dụng bổ đề trên vào bài toán, ta có:

$$\begin{cases} 10^t+10^{-t}\geqslant 7^t+7^{-t} \\ 10^t+10^{-t}\geqslant 3^t+3^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(10^t+10^{-t})\geqslant 7^{1+t}+7^{1-t} \\ 3(10^t+10^{-t})\geqslant 3^{1+t}+3^{1-t} \end{cases} \quad (t=x-y)$$

$$\Rightarrow 10^{1+t}+10^{1-t}\geqslant 7^{1+t}+7^{1-t}+3^{1+t}+3^{1-t}$$

$$\Rightarrow 10^{1+x-y}+10^{1-x+y}\geqslant 7^{1+x-y}+7^{1-x+y}+3^{1+x-y}+3^{1-x+y} \quad (5)$$

Từ (1) và (5), ta có đẳng thức xảy ra, do đó $t=x-y=0\Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình (2) ta được:

$$4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-6x+\frac{9}{4}=2x+3-\sqrt{2x+3}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=\sqrt{2x+3}\\2x-2=-\sqrt{2x+3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\\x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4};\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right);(x;y)=\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{4};\dfrac{5-\sqrt{21}}{4}\right)$ □

Bài 4. Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2-6x.4^y+4x=3.4^{y+1} & (1)\\ \dfrac{1}{(x+3)^2}-|y-2|=0 & (2)\end{cases}$

(Đề nghị OLP 30-04 THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Giải

Trước tiên, ta hãy tìm các nghiệm "đẹp" (nếu có) của hệ.
Điều kiện xác định: $x\neq -3$. Đặt $t=4^y>0$, phương trình (1) trở thành:

$$2x^2-6tx+4x-12t=0\Leftrightarrow 2(x+2)(x-3t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3t\end{array}\right.$$

Khi $x=-2$, thế vào phương trình (2), ta được

$$1-|y-2|=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=3\\y=1\end{array}\right.$$

Từ đó suy ra hai nghiệm của hệ là $(-2;3)$ và $(-2;1)$.
Và ta đã có được hai nghiệm "đẹp". Tiếp theo, ta sẽ đi tiếp theo con đường còn lại để tìm số nghiệm.
Với $x=3t$, thế vào phương trình (2), ta có:

$$\frac{1}{(3t+3)^3}-|y-2|=0$$

Ta có $t=4^y\Leftrightarrow y=\log_4 t$.
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{(3t+3)^3}-|\log_4 t-2|$ với $t>0$.
Ta sẽ tìm cách giải quyết dấu giá trị tuyệt đối này, bằng cách xét các khoảng có thể của t:

- Với $t\geqslant 16$, khi đó $f(t)=\dfrac{1}{(3t+3)^3}-\log_4 t+2$.
  Ta có $f'(t)=-\dfrac{9}{(3t+3)^4}-\dfrac{1}{t\ln 4}<0,\forall t\geqslant 16$.
  Do đó hàm f nghịch biến trên $[16;+\infty)$.
  Mặt khác $f(16)>0$ và $f(64)<0$, suy ra tồn tại duy nhất số $t_1\in(16;64)$ là nghiệm của phương trình $f(t)=0$.
  Do đó, nghiệm $(3t_1;\log_4 t_1)$ là nghiệm thứ ba của hệ.

- Với $0 < t < 16$, khi đó $f(t) = \dfrac{1}{(3t+3)^3} + \log_4 t - 2$.
  Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 4} - \dfrac{9}{(3t+3)^4} = \dfrac{(3t+3)^4 - 9t\ln 4}{(3t+3)^4.t.\ln 4}$.
  Đặt $g(t) = (3t+3)^4 - 9t\ln 4$ với $t \in [0; 16)$.
  Ta có: $g'(t) = 12(3t+3)^3 - 9\ln 4$ và $g''(t) = 12.3^2.(3t+3)^2 > 0$.
  Do đó $g'(t)$ đồng biến trên $[0; 16)$, hay với mọi t thuộc $(0; 16)$, ta có $g'(t) > g'(0)$. Mà $g'(0) = 12.3^3 - 9\ln 4 > 0$ suy ra $g'(t) > 0, \forall t \in (0; 16)$.
  Từ đây, suy ra hàm $g(t)$ đồng biến trên $[0; 16)$, nên $g(t) > g(0) = 81 > 0$. Suy ra $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 16)$, hay hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; 16)$.
  Vì $f(1) < 0$, $f(16) > 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất t_2 thuộc khoảng $(1; 16)$.
  Do đó nghiệm $(3t_2; \log_4 t_2)$ là nghiệm thứ tư của hệ.

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm □

Bài tập tự luyện

1/ $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$. *(HV CNBCVT 1999)*

2/ $\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2+xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases}$. *(ĐH Ngoại thương 1999)*

3/ $\begin{cases} 4^{x^2-16} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1} = 4^{y^2-8y} + 3\sqrt{y-4} + \sqrt{y^2-8y+17} \\ y(x^2-1) - 4x^2 + 3x - 8 + \ln(x^2-3x+3) = 0 \end{cases}$

(Đề nghị OLP 30-04 THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Quảng Nam)

4/ $\log_2\left(\sqrt{x^2-3x+2}+1\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x^2+3x-1} = 2.$

(Đề nghị OLP 30-04 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa)

5/ Xác định số nghiệm của hệ phương trình (ẩn x, y) sau: $\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x.\log_2 y = 1 \end{cases}$

CHƯƠNG V: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CÁC LOẠI HỆ CƠ BẢN

Lý thuyết

★ **Hệ phương trình đối xứng loại I:**
Hệ phương trình đối xứng loại I là hệ có dạng

$$\boxed{\begin{cases} F(x;y)=0 \\ G(x;y)=0 \end{cases}}$$

Trong đó $F(x;y), G(x;y)$ là các đa thức đối xứng với x, y.
Cách giải chung của hệ là đặt $S=x+y; P=xy$ (điều kiện $S^2-4P \geqslant 0$). Dùng tính đối xứng ta đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} F_1(S;P)=0 \\ G_1(S;P)=0 \end{cases}$$

Tìm đươc S và P. Từ đó, theo định lý Viete đảo, x và y là nghiệm của phương trình

$$t^2-St+P=0$$

★ **Hệ phương trình đối xứng loại II:**
Hệ phương trình đối xứng loại II là hệ có dạng

$$\boxed{\begin{cases} F(x;y)=0 \\ F(y;x)=0 \end{cases}}$$

Trong đó $F(x;y)$ là một đa thức không đối xứng.
Trừ hai phương trình vế theo vế để được $F(x;y)-F(y;x)=0$ $(*)$
Coi x là ẩn số, y là tham số và đặt $F(x;y)=f(x)+g(y)$ ($g(y)$ độc lập với x)
thì $F(y;x)=f(y)+g(x)$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow G(x)=f(x)+g(y)-f(y)-g(x)=0$$

Xét $G(x)$, thay $x=y$ thì $G(y)=f(y)+g(y)-f(y)-g(y)=0$
$\Rightarrow y$ là nghiệm của phương trình $G(x)=0$
$\Rightarrow G(x)$ có chứa nhân tử $(x-y)$ theo định lý Bezout.
Như vậy ta có cách giải hệ đối xứng loại II là: Trừ hai phương trình vế theo vế để được

$$G(x;y)=(x-y).M(x;y)=0$$

Sau đó giải hệ trong từng trường hợp $x = y$ và $M(x; y) = 0$.

Lưu ý rằng hệ đối xứng loại II còn có dạng $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(x) \end{cases}$ và nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số đơn điệu cùng chiều thì ta có thể suy ra $x = y$ mà không cần xét $M(x; y) = 0$ (vì trường hợp này sẽ dẫn tới hệ vô nghiệm). Nhưng nếu $f(x), g(x)$ không đơn điệu cùng chiều thì trường hợp $M(x; y) = 0$ sẽ cho nghiệm.

★ Hệ phương trình bậc hai 2 ẩn:

Hệ phương trình bậc hai 2 ẩn có dạng tổng quát

$$\boxed{\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}}$$

Trong đó $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ $(i = 1, 2)$ là các tham số và x, y là ẩn số.

Ta cùng xét một số trường hợp đặc biệt của hệ:

a) Hệ chứa một phương trình bậc nhất:

Ta tính x theo y hoặc ngược lại từ một phương trình, thay vào phương trình còn lại để có một phương trình bậc 2 một ẩn.

b) Hệ chứa một phương trình thuần nhất bậc 2:

Nếu một trong 2 phương trình của hệ không chứa hạng tử bậc nhất và số hạng tự do, chẳng hạn nếu $d_1 = e_1 = f_1 = 0$ thì hệ có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt $y = tx$ rồi thay vào phương trình thuần nhất để tìm được t, từ đó thay vào phương trình thứ 2 để tìm x, y tương ứng.

Phương pháp này cũng có thể áp dụng để giải hệ gồm 2 phương trình bán đẳng cấp bậc hai:

$$(*) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + f_2 = 0 \end{cases}$$

Vì rõ ràng từ hệ ta có thể tạo một phương trình thuần nhất bậc 2 là

$$f_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) - f_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) = 0$$

Trong trường hợp tổng quát, phép giải hệ bậc 2 hai ẩn sẽ dẫn đến giải một phương trình bậc cao ($\geqslant 4$). Nhưng với một số hệ phương trình, ta có thể đưa về hệ (*) bằng cách đặt $x = u + a; y = v + b$ trong đó u, v là ẩn mới (phương pháp tịnh tiến nghiệm). Ta cần tìm hằng số a, b để hạng tử bậc nhất ở hai phương trình bị triệt tiêu, như vậy hệ thu được là hệ đẳng cấp.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $(I) \begin{cases} x^2 + 3y^2 + 4xy - 18x - 22y + 31 = 0 \ (1) \\ 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 46y + 175 = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đặt $x = u + a; y = v + b$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + 4uv + 3v^2 + u(2a + 4b - 18) + v(6b + 4a - 22) + 4ab + a^2 + 3b^2 - 18a - 22b + 31 = 0 \\ 2u^2 + 4v^2 + 2uv + u(4a + 2b + 6) + v(2a + 8b - 46) + 2a^2 + 4b^2 + 2ab + 6a - 16b + 175 = 0 \end{cases}$$

Để hệ số của u, v là 0 ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 4b - 18 = 0 \\ 6b + 4a - 22 = 0 \\ 4a + 2b + 6 = 0 \\ 2a + 8b - 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 7 \end{cases}$$

⊛ Lời giải:
Đặt $x = u - 5; y = v + 7$ ta có hệ phương trình

$$(II) \begin{cases} u^2 + 3v^2 + 4uv = 1 \ (3) \\ 2u^2 + 4v^2 + 2uv = 1 \ (4) \end{cases}$$

Hệ này có thể giải theo cách thông thường, nhưng lưu ý là trừ 2 phương trình vế theo vế ta có ngay

$$u^2 + v^2 - 2uv = 0 \Leftrightarrow u = v$$

Ta có hệ $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u^2 = 1 \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ u = v = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$

Vậy (I) có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 5; \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 7 \right), \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} - 5; \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} + 7 \right)$ □

Với những hệ có chứa tham số, cách giải hoàn toàn tương tự:

Ví dụ: Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} x^2 + 2xy = m \ (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \ (2) \end{cases}$

Giải

Nếu $y = 0$ ta được hệ $\begin{cases} x^2 = m \\ x^2 = 1 \end{cases}$ chỉ có nghiệm khi $m = 1$.

Nếu $m \neq 1$ thì $y \neq 0$, đặt $x = ty$ ta có hệ $(I) \begin{cases} y^2(t^2 + 2t) = m \ (1) \\ y^2(t^2 + t + 1) = 1 \ (2) \end{cases}$

Chia (1) cho (2) và quy đồng ta được $t^2 + 2t = m(t^2 + t + 1)$ (3).

Hệ đã cho có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow (I)$ có nghiệm $(t; y) \Leftrightarrow (3)$ có nghiệm t (do $t^2 + t + 1 > 0$ nên từ đây luôn tìm được y thoả (2)).

Viết lại (3) dưới dạng

$$(m - 1)t^2 + (m - 2)t + m = 0$$

Ta có $\Delta = 4 - 3m^2$ nên (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow |m| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Do $m = 1$ cũng thoả $m \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ nên ta kết luận hệ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ □

Hệ phương trình 3 ẩn bình đẳng

Hệ phương trình 3 ẩn bình đẳng là hệ có các phương trình đều bình đẳng với 3 ẩn, nghĩa là khi hoán vị 2 ẩn tuỳ ý thì mỗi phương trình đều không đổi.
Phương pháp cơ bản để giải hệ là đưa về hệ phương trình

$$(*)\begin{cases} x+y+z=a \ (1) \\ xy+yz+zx=b \ (2) \\ xyz=c \ (3) \end{cases}$$

Bằng cách dùng phép thế hoặc định lý Viete đảo, ta đưa $(*)$ về phương trình một ẩn

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

Giải phương trình trên, tìm nghiệm x_0 thế vào (1) và (3) ta có $\begin{cases} y+z=a-x_0 \\ yz=\dfrac{c}{x_0} \end{cases}$

Như vậy y, z là nghiệm của phương trình $t^2-(a-x_0)t+\dfrac{c}{x_0}=0$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

Giải

Từ hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} xy+yz+zx=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} \\ 3xyz=(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=-12 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} xy+yz+zx=-4 \\ xyz=-4 \end{cases}$. Vậy ta đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} x+y+z=1 \ (1) \\ xy+yz+zx=-4 \ (2) \\ xyz=-4 \ (3) \end{cases}$$

Theo định lý Viete đảo, x,y,z là nghiệm của phương trình

$$t^3-t^2-4t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là $(x;y;z)=(1;2;-2)$ và các hoán vị.□
⊛ Nhận xét: Định lý Viete đảo không nằm trong chương trình phổ thông, nên ta có thể chứng

minh lại bằng phép thế như sau:
Từ (3) $\Rightarrow x, y, z \neq 0$
Nhân hai vế của (2) cho x ta có

$$x^2y + xyz + x^2z = -4x \Leftrightarrow x^2(y+z) = -4x - xyz = 4 - 4x$$

Nhân hai vế của (1) cho x^2 ta có

$$x^3 + x^2(y+z) = x^2 \Leftrightarrow x^3 + 4 - 4x = x^2 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; -2\}$$

Sau đây ta cùng xem qua một số bài tập tổng hợp:

Bài tập tổng hợp

Bài 1: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y = -3 \\ y^2 - 2xy + 2x = -4 \end{cases}$

Giải

Đặt $x = u + 1$ và $y = v + 1$.Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (u+1)^2 - (v+1)^2 - 2(u+1) + 2(v+1) = -3 \\ (v+1)^2 - 2(u+1)(v+1) + 2(u+1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ v^2 - 2uv = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u^2 - 5v^2 = -15 \\ 3v^2 - 6uv = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ 5u^2 + 6uv - 8v^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{4}{5}v \\ u = -2v \end{array}\right. \end{cases}$$

⋇ Với $u = \dfrac{4}{5}v$. Ta có:

$$\frac{16}{25}v^2 - v^2 = -3 \Leftrightarrow v^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{5}{\sqrt{3}}; u = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ v = \dfrac{-5}{\sqrt{3}}; u = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

⋇ Với $u = -2v$ ta có $4v^2 - v^2 = -3 \Leftrightarrow v^2 = -1$ (vô nghiệm)
Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}} + 1; \dfrac{5}{\sqrt{3}} + 1\right); \left(\dfrac{-4}{\sqrt{3}} + 1; \dfrac{-5}{\sqrt{3}} + 1\right)$ □
⊛ Nhận xét: Ngoài phương pháp tịnh tiến nghiệm, với bài này ta có thể biến đổi đẳng thức để tìm ra cách đặt ẩn phụ trên:
Xét hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (x-1)^2 - (y-1)^2 = -3 \\ (y^2 - 2y + 1) - 2(xy - y - x + 1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 - (y-1)^2 = -3 \\ (y-1)^2 - 2(x-1)(y-1) = -5 \end{cases}$$

Từ đó ta đặt $x = u + 1$ và $y = v + 1$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y + 15 = 0 \\ 2x - 2xy + y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

Giải

Đặt $x = u + 1$ và $y = v + 1$. Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} (u+1)^2 - 2(u+1)(v+1) + 2(v+1) + 15 = 0 \\ 2(u+1) - 2(u+1)(v+1) + (v+1)^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2uv = -16 \\ v^2 - 2uv = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 6uv = -48 \\ 8v^2 - 16uv = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 + 10uv - 8v^2 = 0 \\ v^2 - 2uv = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2}{3}v \\ u = -4v \end{array}\right. \\ v^2 - 2uv = -6 \end{cases}$$

⋇ Với $u = \dfrac{2}{3}v$ ta có:

$$v^2 - \frac{4}{3}v^2 = -6 \Leftrightarrow v^2 = 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 3\sqrt{2} \\ v = -3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

⋇ Với $v = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow u = 2\sqrt{2}$
⋇ Với $v = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow u = -2\sqrt{2}$
⋇ Với $u = -4v$.Ta có: $v^2 + 8v^2 = -6 \Leftrightarrow 9v^2 = -6$ (vô nghiệm)
Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y)$ là $\left(2\sqrt{2}+1; 3\sqrt{2}+1\right)$; $\left(-2\sqrt{2}+1; -3\sqrt{2}+1\right)$ □

Bài 3: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 - x - y \\ xy(xy + x + y + 1) = 12 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhận thấy vai trò của x và y là như nhau nên ta sẽ cố gắng phân tích rồi đặt ẩn phụ để đưa hệ về dạng đối xứng loại 1.
⊛ Lời giải:
Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (I) \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 8 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 12 \end{cases}$$

Đặt $x^2 + x = a$ và $y^2 + y = b$. Hệ (I) trở thành $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 12 \end{cases}$
Như vậy a, b là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - 8X + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = 6 \end{array}\right.$$

⋇ Với $a = 2$ ta có:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

⋇ Với $a = 6$ ta có:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Tương tự giải với $b = 2$ và $b = 6$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2); (1; -3); (-2; 2); (-2; -3)$ và các hoán vị. □

Bài 4: Giải hệ phương trình $(*)\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases}$

Giải

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2y \\ y^3 - 2y^2 + 2y + 1 = 2x \end{cases}$

Nhận thấy $f(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$ có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2 > 0\ \forall t$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $x > y \Rightarrow 2x > 2y \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow y > x$ (mâu thuẫn). Tương tự với $x < y$. Vậy $x = y$.

Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x = y \\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x \in \left\{1; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}), (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$ □

⊛ Nhận xét: Ta cũng có thể giải bài trên bằng biến đổi sơ cấp. Nếu trừ hai phương trình vế theo vế ta sẽ được

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 2(y - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 2(x + y) + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Xét trường hợp $x^2 + xy + y^2 - 2(x + y) + 4 = 0$:

Thay $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 1}{2}$ ta có phương trình bậc 6 theo x:

$$x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 14x^3 + 16x^2 - 10x + 13 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^6 - 4x^5 + 4x^4) + (6x^4 - 14x^3 + 10x^2) + (6x^2 - 10x + 13) = 0$$

Phương trình trên vô nghiệm do $\begin{cases} x^6 - 4x^5 + 4x^4 = x^4(x - 2)^2 \geqslant 0 \\ 6x^4 - 14x^3 + 10x^2 > 0 \\ 6x^2 - 10x + 13 > 0 \end{cases}$

Như vậy so với biến đổi sơ cấp, cách dùng đạo hàm khiến lời giản đơn giản hơn nhiều, nhất là trong những bài hệ phương trình mũ - logarit.

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 3^y - 2 = 3x - 2^y \end{cases}$

Giải

Ta viết lại hệ như sau:

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 3y + 2 \\ 2^y + 3^y = 3x + 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x, y > \frac{-2}{3}$. Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3^t$ có $f'(t) = 2^x.\ln 2 + 3^x.\ln 3 > 0\ \forall t \in (\frac{-2}{3}; +\infty)$
Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(\frac{-2}{3}; +\infty)$. Suy ra $x = y$. Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x = y \\ 2^x + 3^x = 3x + 2\ (*) \end{cases}$$

Xét $g(t) = 2^t + 3^t - 3x - 2$, ta có $g''(t) = 2^t.\ln^2 2 + 3^t.\ln^2 3 > 0$ nên $g'(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm, suy ra $g(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm. Như vậy (*) chỉ có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.
Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 1)$ □

Bài tập tự luyện

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 10y = 0 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 - 9x - 6y = 6 \\ x^2 + xy + 2y^2 - 3x - 12y + 10 = 0 \end{cases}$

3) Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HOÁN VỊ

Lý thuyết

Hệ phương trình hoán vị là hệ có dạng:

$$\boxed{\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ ... \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}}$$

Sau đây là một số định lý tổng quát về hệ hoán vị:

★ **Định lý 1:** Nếu hai hàm số $f(x), g(x)$ cùng tăng trên tập A và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i \in A, i = \overline{1, n}$) thì $x_1 = x_2 = .. = x_n$
⊛ **Chứng minh**: Không giảm tổng quát giả sử $x_1 = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$\Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \geqslant g(x_3) \Rightarrow x_2 \geqslant x_3 \Rightarrow ... \Rightarrow x_n \geqslant x_1$$
$$\Rightarrow x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant ... \geqslant x_n \geqslant x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n\ \square$$

★ **Định lý 2:** Nếu hàm số $f(x)$ giảm và $g(x)$ tăng trên tập A và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i \in A, i = \overline{1,n}$) thì với n lẻ, $x_1 = x_2 = .. = x_n$.

⊛ **Chứng minh**: Không giảm tổng quát giả sử $x_1 = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$$\Rightarrow x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \leqslant g(x_3) \Rightarrow x_2 \leqslant x_3 \Rightarrow ... \Rightarrow x_n \geqslant x_1$$
$$\Rightarrow f(x_n) \leqslant f(x_1) \Rightarrow x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n \ \square$$

★ **Định lý 3:** Nếu hàm số $f(x)$ giảm, $g(x)$ tăng trên tập A và $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i \in A, i = \overline{1,n}$) thì với n chẵn, $x_1 = x_3 = .. = x_{n-1}$ hoặc $x_2 = x_4 = ... = x_n$

⊛ **Chứng minh**: Không giảm tổng quát giả sử $x_1 = \max(x_1; x_2; ...; x_n)$

$$\Rightarrow x_1 \geqslant x_3 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_3) \Rightarrow g(x_2) \leqslant g(x_4) \Rightarrow x_2 \leqslant x_4$$
$$\Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_4) \Rightarrow g(x_3) \geqslant g(x_5) \Rightarrow x_3 \geqslant x_5 \Rightarrow ...$$
$$\Rightarrow f(x_{n-2}) \geqslant f(x_n) \Rightarrow g(x_{n-1}) \geqslant g(x_1) \Rightarrow x_{n-1} \geqslant x_1$$
$$\Rightarrow f(x_{n-1}) \leqslant f(x_1) \Rightarrow g(x_n) \leqslant g(x_2) \Rightarrow x_n \leqslant x_2$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} x_1 \geqslant x_3 \geqslant ... \geqslant x_{n-1} \geqslant x_1 \\ x_2 \leqslant x_4 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = ... = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = ... = x_{n-2} \end{cases} \quad \square$$

Trong giải toán, ta thường gặp hệ hoán vị 3 ẩn, trong đó đa phần có thể giải bằng nguyên lí cực hạn. Bài viết này cũng đề cập đến một số hệ đặc biệt, có thể giải bằng cách biến đổi các phương trình, dùng bất đẳng thức hoặc lượng giác hoá. Sau đây là một số bài tập ví dụ.

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình $(I) \begin{cases} 2x(y^2+1) = y(y^2+9) \\ 2y(z^2+1) = z(z^2+9) \\ 2z(x^2+1) = x(x^2+9) \end{cases}$.

Giải

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x = \dfrac{y(y^2+9)}{2(y^2+1)} \\ y = \dfrac{z(z^2+9)}{(z^2+1)} \\ z = \dfrac{x(x^2+9)}{(x^2+1)} \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t(t^2+9)}{2(t^2+1)} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^4 - 4t^2 + 9}{2(t^2+1)^2} > 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

$\Rightarrow x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow z \geqslant x \Rightarrow z = x \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = z.$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$2x^3 + 2x = x^3 + 9x \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{7} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{7} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x; y; z)$ là $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7}; -\sqrt{7})$; $(0; 0; 0)$ và $(\sqrt{7}; \sqrt{7}; \sqrt{7})$. □
⊛ Nhận xét: Bài 1 cho ta cái nhìn sơ lược về nguyên lí cực hạn trong hệ hoán vị. Ta cũng có thể tổng quát bài trên như sau:

Bài 1*:(Olympic 30-4-2009)

Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình $\begin{cases} 2x(y^2+a^2) = y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2) = z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2) = x(x^2+9a^2) \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $(II) \begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$

Giải

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 6x^2 - 12x + 8 \ (1) \\ z^3 = 6y^2 - 12y + 8 \ (2) \\ x^3 = 6z^2 - 12z + 8 \ (3) \end{cases}$$

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.
Ta có $y^3 = 6(x-1)^2 + 2 \geqslant 2 \Rightarrow y > 1$. Chứng minh tương tự có $x, y, z > 1$.
Xét $f(t) = 6t^2 - 12t + 8; f'(t) = 12t - 12 > 0 \ \forall t > 1 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$
Ta có $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow y^3 \geqslant z^3 \Rightarrow y \geqslant z \Rightarrow f(y) \geqslant f(z) \Rightarrow z^3 \geqslant x^3$
$\Rightarrow x \geqslant y \geqslant z \geqslant x \Rightarrow x = y = z$. Khi đó:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$$

Vậy (II) có nghiệm $(x; y; z) = (2; 2; 2)$ □
⊛ Nhận xét: Ở bài này ta thấy $f(t)$ không đơn điệu, khác với bài 1. Do đó phải có thêm nhận xét $x, y, z > 1$. Đây chính là mấu chốt của bài toán.
Sau đây ta sẽ đến với một cách nhìn mới về nguyên lí cực hạn. Thay vì đánh giá x, y, z riêng lẻ, ta sẽ đánh giá những biểu thức hoán vị của x, y, z là $x + y, y + z, z + x$:

Bài 3: *(VMO 2006)* Giải hệ phương trình $(III) \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$

Giải

Ta cùng xem qua 2 cách giải của bài toán.

⁎ Cách 1:

Cộng 3 phương trình của hệ ta có:

$$x^3 + 3x^2 + x - 5 + y^3 + 3y^2 + y - 5 + z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+5) + (y-1)(y^2+4y+5) + (z-1)(z^2+4z+5) = 0$$

Nếu $x > 1 \Rightarrow z^3 + 3z^2 + 2z - 5 > 1 \Rightarrow (z-1)(z^2 + 4z + 6) > 0 \Rightarrow z > 1$.
Lại từ $z > 1$, lập luân tương tự suy ra $y > 1$. Khi đó:

$$(x-1)(x^2+4x+5) + (y-1)(y^2+4y+5) + (z-1)(z^2+4z+5) > 0 \text{ (vô lý)}$$

Tương tự, nếu $x < 1$ ta suy ra $y < 1, z < 1$ cũng suy ra điều vô lý.
Vậy $x = y = z = 1$ chính là nghiệm của hệ phương trình. □

⋇ **Cách 2:**
Ta có:

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = y + x + 6 \ (1) \\ (y+1)^3 = z + y + 6 \ (2) \\ (z+1)^3 = x + z + 6 \ (3) \end{cases}$$

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.
$\Rightarrow x + z \geqslant y + z \Rightarrow (z+1)^3 \geqslant (y+1)^3 \Rightarrow z \geqslant y \Rightarrow x + z \geqslant x + y \Rightarrow (z+1)^3 \geqslant (x+1)^3$
$\Rightarrow z \geqslant x \Rightarrow z = x \Rightarrow x + y = y + z \Rightarrow (x+1)^3 = (y+1)^3 \Rightarrow x = y$
Khi đó:

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy (III) có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ □
⊛ Nhận xét: Cách 1 là phương pháp dùng bất đẳng thức, sẽ được đề cập sau. Xét cách 2, ta thấy việc đánh giá $x + y, y + z, z + x$ rõ ràng có lợi thế của nó. Ta vẫn có thể so sánh $x + y, y + z, z + x$ dựa vào mối quan hệ hoán vị giữa x, y, z nhưng vế trái của (1), (2), (3) đã trở nên rất đẹp. Ta cùng xét một bài tương tự:

Bài 4: Giải hệ phương trình $(IV) \begin{cases} x = 3y^3 + 2y^2 \ (1) \\ y = 3z^3 + 2z^2 \ (2) \\ z = 3x^3 + 2x^2 \ (3) \end{cases}$

Giải

Ta có

$$(IV) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3y^3 + 2y^2 + y \\ y + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ z + x = 3x^3 + 2x^2 + x \end{cases}$$

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.
Xét $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t$ ta có $f'(t) = 9t^2 + 4t + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
Lại có $x + y \geqslant y + z \Rightarrow f(y) \geqslant f(z) \Rightarrow y \geqslant z \Rightarrow x + y \geqslant x + z \Rightarrow f(y) \geqslant f(x) \Rightarrow y \geqslant x$
$\Rightarrow y = x \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow x + y = x + z \Rightarrow y = z$

Vậy

$$(IV) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ 3x^3 + 2x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x \in \{0; -1; \dfrac{1}{3}\} \end{cases}$$

Vậy (IV) có nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 0), (-1; -1; -1), \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Câu hỏi đặt ra là: khi nào ta phải xét $(x + y; y + z; z + x)$? Mấu chốt ở đây chính là ta cần xây dựng một hàm đơn điệu trên miền xác định. Nếu để nguyên (IV), ta xét $f(t) = 3t^3 + 2t^2$ thì $f'(t) = 9t^2 + 4t$ có nghiệm $t = 0$ nên $f(t)$ có thể đổi chiều đơn điệu. Từ đó ta nghĩ tới việc biến đổi các phương trình.

Để có một hàm đơn điệu, ta sẽ cộng hai vế của (1) cho ky, tương tự với (2) và (3):

$$(IV) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ky = 3y^3 + 2y^2 + ky \\ y + kz = 3z^3 + 2z^2 + kz \\ z + kx = 3x^3 + 2x^2 + kx \end{cases}$$

Khi đó ta xét $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + kt$ có $f'(t) = 9t^2 + 4t + k$. Ta cần $f'(t) > 0\ \forall t$, nghĩa là $k > \dfrac{4}{9}$

Nhưng số k còn phải đảm bảo ta vẫn có thể so sánh VT của (1), (2) và (3). Dễ thấy hằng số tốt nhất là $k = 1$. Khi đó ta có $\begin{cases} 9t^2 + 4t + 1 > 0\ \forall t \\ x + y \geqslant x + z \geqslant y + z \end{cases}$

Từ đó ta đi đến lời giải như trên.

Bài 5: Giải hệ phương trình $(V) \begin{cases} x = 2y^2 - 1\ (1) \\ y = 2z^2 - 1\ (2) \\ z = 2x^2 - 1\ (3) \end{cases}$

Giải

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

$(3) \Rightarrow 2x^2 - 1 = z \leqslant x \Rightarrow \dfrac{-1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

Đặt $x = \cos t$ $(t \in [0; \dfrac{2\pi}{3}])$

$(3) \Leftrightarrow z = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$

$(2) \Leftrightarrow y = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t$

$(1) \Leftrightarrow x = 2\cos^2 4t - 1 = \cos 8t$

$\Rightarrow \cos t = \cos 8t \Leftrightarrow t = \dfrac{k2\pi}{7} \vee t = \dfrac{k2\pi}{9}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow t \in \left\{0; \dfrac{2\pi}{9}; \dfrac{4\pi}{9}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{7}; \dfrac{4\pi}{7}\right\}$ (do $t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$)

Vậy (VI) có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1)$; $\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}; \cos\dfrac{4\pi}{9}; \cos\dfrac{8\pi}{9}\right)$; $\left(\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-1}{2}; \dfrac{-1}{2}\right)$

$\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}; \cos\dfrac{4\pi}{7}; \cos\dfrac{8\pi}{7}\right)$ và các hoán vị. □

⊛ Nhận xét: Phương pháp lượng giác hoá cần sự khéo léo và hiểu biết rõ về công thức lượng giác. Như ở bài 5, từ $x = 2y^2 - 1$ làm ta nhớ đến công thức $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, do đó ta mới

đặt $x = \cos t$. Ta xét tiếp Bài 6:

Bài 6: Giải hệ phương trình $(VI)\begin{cases} x^2 = y + 2 \ (1) \\ y^2 = z + 2 \ (2) \\ z^2 = x + 2 \ (3) \end{cases}$

Giải

Không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.
$\Rightarrow x^2 = y + 2 \leqslant x + 2 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$.
Đặt $x = 2\cos t$ $(t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right])$.
$(1) \Leftrightarrow y = x^2 - 2 = 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos 2t$
$(2) \Leftrightarrow z = y^2 - 2 = 2(2\cos^2 2t - 1) = 2\cos 4t$
$(3) \Leftrightarrow x = z^2 - 2 = 2(2\cos^2 4t - 1) = 2\cos 8t$
$\Rightarrow \cos t = \cos 8t \Leftrightarrow t = \dfrac{k2\pi}{7} \vee t = \dfrac{k2\pi}{9}$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow t \in \left\{0; \dfrac{2\pi}{9}; \dfrac{4\pi}{9}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{7}; \dfrac{4\pi}{7}\right\}$ do $t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$
Vậy (VI) có nghiệm $(x; y; z) = (2; 2; 2)$; $\left(2\cos\dfrac{2\pi}{9}; 2\cos\dfrac{4\pi}{9}; 2\cos\dfrac{8\pi}{9}\right)$; $(-1; -1; -1)$;
$\left(2\cos\dfrac{2\pi}{7}; 2\cos\dfrac{4\pi}{7}; 2\cos\dfrac{8\pi}{7}\right)$ và các hoán vị. □
⊛ Nhận xét: Bài 6 rõ ràng cần sự khéo léo. Nếu đặt $x = \sin t; \cos t$ hay $\tan t$ thì biểu thức $x^2 - 2$ không liên quan trực tiếp đến công thức lượng giác nào, nhưng để ý rằng
$(2\cos t)^2 - 2 = 2(2\cos t - 1) = 2\cos 2t$. Vì vậy ta phải đặt $x = 2\cos t$.

Bài 7: Giải hệ phương trình $(VII)\begin{cases} x^4y - 6x^2y + 4x^3 - 4x + y = 0 \\ y^4z - 6y^2z + 4y^3 - 4y + z = 0 \\ z^4x - 6z^2x + 4z^3 - 4z + x = 0 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đầu tiên ta biến đổi

$$(VII) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x - 4x^3}{x^4 - 6x^2 + 1} \ (1) \\ z = \dfrac{4y - 4y^3}{y^4 - 6y^2 + 1} \ (2) \\ x = \dfrac{4z - 4z^3}{z^4 - 6z^2 + 1} \ (3) \end{cases}$$

Ta thử xét đạo hàm của $f(t) = \dfrac{4t - 4t^3}{t^4 - 6t^2 + 1}$. Dễ thấy

$$f'(t) = \frac{4(t^2 + 1)^3}{(t^4 - 6t^2 + 1)^2} > 0 \ \forall t \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$$

Đến đây, nếu chưa nhận ra vấn đề thì ta sẽ có nhận xét $x = y = z$
$\Rightarrow (VII)$ có nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Thực ra ở đây ta đã mắc một sai lầm rất tinh vi là hàm $f(t)$ chỉ đồng biến trên từng khoảng xác định chứ không đồng biến trên miền xác định (ví dụ $f(2) = \frac{24}{7} > f(3) = \frac{-24}{7}$). Vì vậy **bài 7 không thể dùng hàm đơn điệu**. Theo ý tưởng ở trên, ta nghĩ tới phương án 2: lượng giác hoá.
Nhìn vào phân thức, ta thường nghĩ tới công thức về tan. Để ý rằng $f(\tan a) = \tan 4a$ do đó ta đặt $x = \tan a$.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $x, y, z \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$
Đặt $x = \tan a$ $(a \in [0; \pi) \wedge a \neq \frac{\pi}{2})$
Từ $(1), (2), (3)$ ta tính được: $y = f(x) = \tan 4a; z = f(y) = \tan 16a; x = f(z) = \tan 64a$
$\Rightarrow \tan a = \tan 64a \Leftrightarrow a = \frac{k\pi}{63}$ $(k = \overline{0, 62})$
Vậy (VII) có nghiệm $(x; y; z) = (\tan a; \tan 4a; \tan 16a)$ với $a = \frac{k\pi}{63}, k = \overline{0; 62}$
⊛ Nhận xét: Nguyên lí cực hạn thường được dùng trong các bài hệ hoán vị nhưng không còn tác dụng với những bài đặt lượng giác. Nếu xét hàm đơn điệu theo cách đầu tiên thì ta đã làm mất **60 nghiệm** của hệ!

Bài 8: Giải hệ phương trình: $(VIII)\begin{cases} x^3 - 3x = y \ (1) \\ y^3 - 3y = z \ (2) \\ z^3 - 3z = x \ (3) \end{cases}$ (HSG Thái Bình 2009)

Giải

Từ hệ phương trình suy ra: $\left[(x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x)\right]^3 - 3\left[(x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x)\right] = x$.
Đây là phương trình đa thức bậc 27 nên có nhiều nhất 27 nghiệm. Do đó hệ đã cho có nhiều nhất 27 nghiệm.
Xét $x \in [-2; 2]$. Ta sẽ chứng minh hệ có 27 nghiệm trong trường hợp này, do đó không cần xét các trường hợp còn lại.
Đặt $x = 2\cos t$ $(t \in [0; \pi])$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow y = 2\cos 3t \\ (2) \Leftrightarrow z = 2\cos 9t \\ (3) \Leftrightarrow x = 2\cos 27t \end{cases} \Rightarrow \cos 27t = \cos t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\frac{\pi}{13} \\ t = k\frac{\pi}{14} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Với $t = k\frac{\pi}{13} (k \in \mathbb{Z})$, do $t \in [0; \pi]$ nên k nhận các giá trị 0;1;2;...;12;13.
Với $t = k\frac{\pi}{14} (k \in \mathbb{Z})$, do $t \in [0; \pi]$ nên k nhận các giá trị 0;1;2;...;12;13;14.
Nghiệm của hệ ứng với $t = 0$ và $t = \pi$ ở cả hai trường hợp trùng nhau nên hệ có 27 nghiệm phân biệt là $\left(2\cos\frac{k\pi}{13}; 2\cos\frac{k3\pi}{13}; 2\cos\frac{k9\pi}{13}\right)$ với $k = \overline{0, 13}$ và
$\left(2\cos\frac{k\pi}{14}; 2\cos\frac{k3\pi}{14}; 2\cos\frac{k9\pi}{14}\right)$ với $k = \overline{1, 13}$ □
⊛ Nhận xét: Mấu chốt của lời giải chính là nhận xét hệ có tối đa 27 nghiệm, khi đó không cần xét các trường hợp còn lại. Thật ra ta vẫn có thể xét thêm trường hợp $x, y, z \in (-\infty; -2)$ và

$x, y, z \in (2; +\infty)$, khi đó hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ là hàm đơn điệu.
Tiếp theo ta cùng xem qua một số bài hệ hoán vị giải bằng **Bất đẳng thức**:

Bài 9: Giải hệ phương trình $(IX) \begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$

Giải

Ta cùng xem qua 2 cách giải cho bài toán:

⋇ **Cách 1:**
Không mất tính tổng quát giả sử: $x = \min\{x; y; z\}$
$x^2 - 1 = y - x \geqslant 0 \Rightarrow |x| \geqslant 1$
$z^2 - 1 = x - z \leqslant 0 \Rightarrow |z| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant y^2 + y - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant y^2 + y \leqslant 2 \Rightarrow y \in [-2; -1] \cup [0; 1]$.
* Nếu $x > 0 \Rightarrow z \geqslant x \geqslant 1 \Rightarrow z = x = 1 \Rightarrow y = 1$
* Nếu $x \leqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -1 \Rightarrow z^2 + z - 1 \leqslant -1 \Rightarrow z \in [0; 1] \\ x \leqslant -1 \Rightarrow x(x+1) \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -1 \end{cases}$
* Nếu $y = -1 \Rightarrow x = y = z = -1$
* Nếu $y > -1 :\Rightarrow y \in [0; 1]$
Ta có: $\begin{cases} -1 \geqslant z^2 + z - 1 = x \geqslant -\dfrac{5}{4} \\ y^2 + y - 1 = z \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ -1 \leqslant z \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow |xyz| < 1 \ (*)$.
Mà $xyz(x+1)(y+1)(z+1) = (x^2 + x)(y^2 + y)(z^2 + z) = (x+1)(y+1)(z+1)$
⋇ Nếu $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$ thì $x = y = z = -1$
⋇ Nếu $(x+1)(y+1)(z+1) \neq 0$ thì $xyz = 1$ (sai do (*))
Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1), (-1; -1; -1)$ □

⋇ **Cách 2:**
Cộng vế theo vế ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = y + 1 \\ y(y+1) = z + 1 \\ z(z+1) = x + 1 \end{cases}$
Nếu $x = -1 \Leftrightarrow y = z = -1$
Nếu $x, y, z \neq -1$ thì nhân vế theo vế, ta được: $xyz = 1$
Lại có: $3 = x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1), (-1; -1; -1)$ □

Bài 10: Giải hệ phương trình $(X) \begin{cases} x^3 - 2x - 2 = y \\ y^3 - 2y - 2 = z \\ z^3 - 2z - 2 = x \end{cases}$

Giải

Hệ (X) tương đương với

$$\begin{cases} (x-2)[(x+1)^2+1] = y-2 \ (1) \\ (y-2)[(y+1)^2+1] = z-2 \ (2) \\ (x-2)[(z+1)^2+1] = x-2 \ (3) \end{cases}$$

Để ý rằng $\begin{cases} (1) \Rightarrow |x-2| \geqslant |y-2| \\ (2) \Rightarrow |y-2| \geqslant |z-2| \\ (3) \Rightarrow |z-2| \geqslant |x-2| \end{cases} \Rightarrow |x-2| = |y-2| = |z-2|$

Ta cũng có $x-2, y-2, z-2$ cùng dấu do đó $x-2 = y-2 = z-2 \Leftrightarrow x = y = z$

Vậy (X) trở thành $\begin{cases} x = y = z \\ x^3 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = -1 \\ x = y = z = 2 \end{array}\right.$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (-1; -1; -1), (2; 2; 2)$ □

Bài 11: Giải hệ phương trình $(XI) \begin{cases} 4x^2 - 3x + 1 = y \\ 4y^2 + y + 1 = 5z \\ 4z^2 - z + 1 = 3x \end{cases}$

Giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$(XI) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 = y - x \\ (2y-1)^2 = 5(z-y) \\ (2z-1)^2 = 3(x-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ y - z \geqslant 0 \\ z - x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ 4x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ □

⊛ Nhận xét: Tổng quát hơn, ta có thể giải hệ phương trình $\begin{cases} [f(x)]^2 = (y-x)^p.\alpha \\ [f(y)]^2 = (z-y)^m.\beta \\ [f(z)]^2 = (x-z)^n.\chi \end{cases}$

với m, n, p là các số lẻ và $\alpha, \beta, \chi \geqslant 0$

Bài 12: Giải hệ phương trình $(XII) \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_2) \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_3) \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_4) \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) \end{cases}$ (Olympic 30-4-2007)

Giải

Từ hệ phương trình ta có $|x_i| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{9} < \dfrac{1}{2}$ $(i = \overline{1,4})$
$\Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} < \pi x_i < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\pi x_i) \leqslant 1 \Rightarrow 0 < x_i < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < \pi x_i < \dfrac{\pi}{2}$
Không giảm tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$
$\Rightarrow x_1 \geqslant x_3 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_2) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_4) \Rightarrow \pi x_2 \leqslant \pi x_4 \Rightarrow x_2 \leqslant x_4$
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_3) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) \Rightarrow \pi x_3 \geqslant \pi x_1 \Rightarrow x_3 \geqslant x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$
Khi đó suy ra $x_2 = x_4$.
Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x)$ với $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$
Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi\sin(\pi x) \geqslant 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi > 0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.
Lại có: $x_1 + x_4 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) = x_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ (do hàm số $f(x)$ đồng biến).
Do đó: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) \Rightarrow \cos(\pi x_1) - 3\sqrt{3}x_1 = 0$
Xét hàm số $g(x) = \cos(\pi x) - 3\sqrt{3}x$ với $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$
Ta có: $g'(x) = -\pi\sin(\pi x) - 3\sqrt{3} < 0\ \forall x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.
Do đó phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên đoạn này.
Mặt khác, $g(\dfrac{1}{6}) = 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{6}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}\right)$ $\square$.

Bài 13: Giải hệ phương trình $(XIII)\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (z-1)^2 \\ z = (t-1)^2 \\ t = (x-1)^2 \end{cases}$

Giải

Giả sử $x = \min\{x; y; z; t\}$. Từ hệ phương trình ta suy ra $x, y, z, t > 0$.
⁎ Trường hợp 1: $0 < x \leqslant 1$
$\Rightarrow -1 < x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 < 1 \Rightarrow 0 < t \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (t-1)^2 < 1$
$\Rightarrow 0 < z \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (z-1)^2 < 1 \Rightarrow 0 < y \leqslant 1$.
Vậy ta có: $0 < x, y, z, t \leqslant 1$.
Khi đó, từ $z \geqslant x$ suy ra $(t-1)^2 \geqslant (y-1)^2 \Rightarrow y \geqslant t \Rightarrow (z-1)^2 \geqslant (x-1)^2$
$\Rightarrow x \geqslant z \Rightarrow (y-1)^2 \geqslant (t-1)^2 \Rightarrow t \geqslant y$.
Từ đó suy ra: $x = z, y = t$.

Từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ (loại)} \\ x = y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

⋇ Trường hợp 2: $x > 1$

$\Rightarrow x, y, z, t > 1$. Khi đó ,từ $y \geqslant x$ suy ra $(z-1)^2 \geqslant (y-1)^2 \Rightarrow z \geqslant y$

$\Rightarrow (t-1)^2 \geqslant (z-1)^2 \Rightarrow t \geqslant z \Rightarrow (x-1)^2 \geqslant (t-1)^2 \Rightarrow x \geqslant t$. Suy ra: $x = y = z = t$.

Từ hệ phương trình suy ra:

$$x = (x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(x;y;z;t) = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$;$(0;1;0;1)$; $(1;0;1;0)$ □.

Bài 14: Giải hệ phương trình $(XIV)\begin{cases} x_1^2 + x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_3^2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ x_4^2 + x_4 - x_1 - 1 = 0 \end{cases}$. (Olympic 30-4-2011)

Giải

Không giảm tổng quát giả sử $x_1 = \min\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$.

Xét $f(t) = t^2 + t - 1$. Hệ phương trình tương tương

$$\begin{cases} f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_3 \\ f(x_3) = x_4 \\ f(x_4) = x_1 \end{cases}$$

Hàm số $f(t)$ tăng trên khoảng $(-\dfrac{1}{2}; +\infty)$, giảm trên khoảng $(-\infty; -\dfrac{1}{2})$ và

$f(t) \geqslant f(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{5}{4} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên $x_i \geqslant -\dfrac{5}{4} \quad \forall i = \overline{1,4}$.

⋇ Nếu $x_1 \geqslant -\dfrac{1}{2}$:

Ta có: $\begin{cases} x_4 \geqslant -\dfrac{5}{4} \\ f(x_4) \geqslant -\dfrac{1}{2} > \dfrac{-11}{6} = f(-\dfrac{5}{4}) \end{cases} \Rightarrow x_4 > -\dfrac{1}{2}$.

Lập luận tương tự ta cũng có: $x_2, x_3 > -\frac{1}{2}$.
Do $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow x_2 \leqslant x_3 \Rightarrow f(x_2) \leqslant f(x_3) \Rightarrow x_3 \leqslant x_4$
$\Rightarrow f(x_3) \leqslant f(x_4) \Rightarrow x_4 \leqslant x_1 \Rightarrow x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
⁎ Nếu $x_1 < -\frac{1}{2}$:
Nếu có $k \in \{1;2;3;4\}$ để $x_k \geqslant -\frac{1}{2}$ thì theo trường hợp trên ta có: $x_i \geqslant -\frac{1}{2} \quad \forall i = \overline{1,4}$
$\Rightarrow x_1 \geqslant -\frac{1}{2}$(mâu thuẫn). Vậy $x_i < -\frac{1}{2} \quad \forall i = \overline{1,4}$.
Do $x_1 \leqslant x_3 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_3) \Rightarrow x_2 \geqslant x_4 \Rightarrow f(x_2) \leqslant f(x_4) \Rightarrow x_3 \leqslant x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$.
Lập luận tương tự ta có $x_2 = x_4$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 1 = x_2^2 + 2x_2 - 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 - 2 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = x_2 = \pm 1$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$
Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$ □.

Bài 15: Giải hệ phương trình (XV) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \ (1) \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) \ (2) \\ ... \\ x_{2012} = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \ (2012) \end{cases}$

Giải

ĐKxĐ: $x_i \neq 0 \ (i = \overline{1;2012})$
$(1) \Rightarrow |x_1| = \frac{1}{2}|x_2 + \frac{1}{x_2}| = \frac{1}{2}(|x_2| + |\frac{1}{x_2}|) \geqslant 1$
Chứng minh tương tự có $|x_i| \geqslant 1 \ (i = \overline{1;2012})$
Lại có: $x_1.x_2 = \frac{1}{2}(x_2^2 + 1) > 0 \Rightarrow x_1, x_2$ cùng dấu.
Chứng minh tương tự có $x_1, x_2, ..., x_{2012}$ cùng dấu.

$$\Rightarrow |\sum_{i=1}^{2012} x_i| = \sum_{i=1}^{2012} |x_i| \wedge |\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{x_i}| = \sum_{i=1}^{2012} |\frac{1}{x_i}| (*)$$

Cộng $(1), (2), ..., (2012)$ vế theo vế ta có:

$$\sum_{i=1}^{2012} x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012}(x_i + \frac{1}{x_i}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{2012} x_i = \sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{x_i} \Rightarrow |\sum_{i=1}^{2012} x_i| = |\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{x_i}| \Rightarrow \sum_{i=1}^{2012} |x_i| = \sum_{i=1}^{2012} |\frac{1}{x_i}| (**) \ (do (*))$$

Lại có: $|x_i| \geqslant 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2012} |x_i| \geqslant 2012 \geqslant \sum_{i=1}^{2012} |\frac{1}{x_i}|$

Vậy (**) tương đương

$$|x_1| = |x_2| = ...|x_{2012}| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = 1 \\ x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = -1 \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $(VIII)$ có nghiệm $(x_1; x_2; ...x_{2012}) = (1; 1; ...; 1), (-1; -1, ...; -1)$. □

Như vậy, bằng biến đổi khéo léo, kết hợp đẳng thức "$|\sum_{i=1}^{n} x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Leftrightarrow x_1, x_2, ...x_n$ cùng dấu", ta đã giải quyết bài toán mà không cần tới nguyên lí cực hạn.

Bài 16: Giải hệ phương trình: $(XVI)\begin{cases} x_1^2 = x_2 + 1 \\ x_2^2 = x_3 + 1 \\ .... \\ x_{n-1}^2 = x_n + 1 \\ x_n^2 = x_1 + 1 \end{cases}$ $(n \in N*, n \geqslant 2)$.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2..., x_n\}$(*).

Thế thì $x_n^2 = x_1 + 1 = \max\{x_1 + 1, x_2 + 1, ..., x_n + 1\} = \max\{x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\}$.

$\Rightarrow |x_n| = \max\{|x_1|, |x_2| ..., |x_n|\}$(**)

Từ (*) và (**) suy ra $x_n \leqslant 0$.

⁎ Nếu $x_1 > 0$ thì $x_n^2 = x_1 + 1 > 1$. Vì $x_n < 0$ nên $x_n < -1$(vô lí vì $x_{n-1}^2 = x_n + 1 < 0$).

Vậy $x_1 \leqslant 0 \Rightarrow x_i \leqslant 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Từ (**) suy ra $x_n = \min\{x_1, x_2..., x_n\}$.

Vì $x_i \leqslant x_1 \leqslant 0 \quad \forall i$ nên $|x_1| = \min\{|x_i|\}$ hay ${x_1}^2 = \min\{{x_i}^2\}$.

Vậy $x_2 = x_1^2 - 1 = \min\{x_i^2 - 1\} = \min\{x_i\} = x_n$. Từ $x_2^2 = x_3 + 1$ và $x_n^2 = x_1 + 1$ suy ra $x_1 = x_3$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có $\begin{cases} x_1 = x_3 = ... = \max\{x_i\} \\ x_2 = x_4 = ... = \min\{x_i\} = x_n \end{cases}$.

⁎ Với n lẻ:

Ta có $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Từ hệ ta có: $x_1^2 - x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm là $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

⁎ Với n chẵn:

Từ $x_2^2 = x_3 + 1$, $x_1^2 = x_2 + 1$ và $x_1 = x_3$ ta có $(x_1^2 - 1)^2 = x_1 + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 = -1 \\ x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm

$(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}; \ldots; \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right), (-1; 0; -1; 0\ldots; -1; 0), (0; -1; 0; -1; \ldots; 0; -1)$. □

Bài 17: Giải hệ phương trình: $(XVIII)\begin{cases} x^3 - 12y^2 + 48y - 64 = 0 \ (1) \\ y^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 0 \ (2) \\ z^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \ (3) \end{cases}$

Giải

Cộng $(1),(2),(3)$ vế theo vế ta có:

$$(x-4)^3+(y-4)^3+(z-4)^3=0(*)$$

Suy ra trong 3 số hạng trên có ít nhất 1 số không âm, giả sử là $(z-4)^3\geqslant 0 \Leftrightarrow z\geqslant 4$
$(2)\Rightarrow y^3-16=12(z-2)^2\geqslant 12.2^2\Rightarrow y\geqslant 4$
$(1)\Rightarrow x^3-16=12(y-2)^2\geqslant 12.2^2\Rightarrow x\geqslant 4$
Vậy $x,y,z\geqslant 4\Rightarrow VT(*)\geqslant 0$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow x-4=y-4=z-4=0\Leftrightarrow x=y=z=4$
Thử lại ta thấy (IX) có nghiệm $(x;y;z)=(4;4;4)$ □

Bài 18: Tìm nghiệm dương của hệ phương trình $(XVII)\begin{cases}30\sqrt{x_1}+4\sqrt{x_2}=\sqrt[2009]{x_3^{2008}}\\30\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_3}=\sqrt[2009]{x_4^{2008}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\30\sqrt{x_{2008}}+4\sqrt{x_1}=\sqrt[2009]{x_2^{2008}}\end{cases}$

Giải

Giả sử $(x_1,x_2,x_3.....,x_{2008})$ là một nghiệm của hệ phương trình.
Đặt $a=\max\{x_1,x_2,x_3.....,x_{2008}\}$, $b=\min\{x_1,x_2,x_3.....,x_{2008}\}\Rightarrow a\geqslant b>0$.
Ta có:

$$\begin{cases}34\sqrt{a}\geqslant 30\sqrt{x_1}+4\sqrt{x_2}=\sqrt[2009]{x_3^{2008}}\\34\sqrt{a}\geqslant 30\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_3}=\sqrt[2009]{x_4^{2008}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\34\sqrt{a}\geqslant 30\sqrt{x_{2008}}+4\sqrt{x_1}=\sqrt[2009]{x_2^{2008}}\end{cases}$$

$\Rightarrow 34\sqrt{a}\geqslant \max\left\{\sqrt[2009]{x_1^{2008}},\sqrt[2009]{x_2^{2008}},...,\sqrt[2009]{x_{2008}^{2008}}\right\}$
$\Rightarrow 34\sqrt{a}\geqslant \sqrt[2009]{a^{2008}}\Rightarrow 34^{4018}a^{2009}\geqslant a^{4016}\Rightarrow a^{2007}\leqslant 34^{4018}\Rightarrow a\leqslant \sqrt[2007]{34^{4018}}$
Tương tự ta có:

$$\begin{cases}34\sqrt{b}\leqslant 30\sqrt{x_1}+4\sqrt{x_2}=\sqrt[2009]{x_3^{2008}}\\34\sqrt{b}\leqslant 30\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_3}=\sqrt[2009]{x_4^{2008}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\34\sqrt{b}\leqslant 30\sqrt{x_{2008}}+4\sqrt{x_1}=\sqrt[2009]{x_2^{2008}}\end{cases}$$

$\Rightarrow 34\sqrt{b}\leqslant \min\left\{\sqrt[2009]{x_1^{2008}},\sqrt[2009]{x_2^{2008}},...,\sqrt[2009]{x_{2008}^{2008}}\right\}$
$\Rightarrow 34\sqrt{b}\leqslant \sqrt[2009]{b^{2008}}\Rightarrow 34^{4018}b^{2009}\leqslant b^{4016}\Rightarrow b^{2007}\geqslant 34^{4018}\Rightarrow b\geqslant \sqrt[2007]{34^{4018}}$
Vậy $a=b=\sqrt[2007]{34^{4018}}\Rightarrow x_1=x_2=...x_{2008}=\sqrt[2007]{34^{4018}}$.
Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình là $x_1=x_2=...x_{2008}=\sqrt[2007]{34^{4018}}$ □
Ta cùng xem qua một số bài hệ hoán vị lượng giác:

Bài 19: Giải hệ phương trình $(XIX)\begin{cases}\cos 2x+\cos x=2\cos y\\ \cos 2y+\cos y=2\cos z\\ \cos 2z+\cos z=2\cos x\end{cases}$

Giải

Ta có:

$$(XIX)\Leftrightarrow\begin{cases}(2\cos x-1)(\cos x+2)=2\cos y-1\\ (2\cos y-1)(\cos y+2)=2\cos z-1\\ (2\cos z-1)(\cos z+2)=2\cos x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|2\cos x-1|(\cos x+2)=|2\cos y-1|\\ |2\cos y-1|(\cos y+2)=|2\cos z-1|\\ |2\cos z-1|(\cos z+2)=|2\cos x-1|\end{cases}$$

$\Rightarrow |2\cos x-1|\geqslant|2\cos y-1|\geqslant|2\cos z-1|\geqslant|2\cos x-1|$ (do $\cos x+2;\cos y+2;\cos z+2\geqslant 1$)
$\Rightarrow |2\cos x-1|=|2\cos y-1|=|2\cos z-1|$

Khi đó (XIX) trở thành: $\begin{cases}|2\cos x-1|(\cos x+2)=|2\cos x-1|\\ |2\cos y-1|(\cos y+2)=|2\cos y-1|\\ |2\cos z-1|(\cos z+2)=|2\cos z-1|\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=2\cos y-1=2\cos z-1=0\\ \cos x+2=\cos y+2=\cos z+2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x,y,z\in\left\{\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}\\ x,y,z\in\{\pi\pm 2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\end{array}\right.$ □

Bài 20: Giải hệ phương trình $(XX)\begin{cases}2\cos 2x+\dfrac{\tan^2x+\tan^2y}{1+\tan^2x}=2\\ 2\cos 2y+\dfrac{\tan^2y+\tan^2z}{1+\tan^2}=2\\ 2\cos 2z+\dfrac{\tan^2z+\tan^2x}{1+\tan^2z}=2\end{cases}$

Giải

Từ đẳng thức $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, ta có

$$(XX)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\tan^2y-\tan^2x}{1+\tan^2x}=1-\cos 2x\\ \dfrac{\tan^2z-\tan^2y}{1+\tan^2y}=1-\cos 2y\\ \dfrac{\tan^2x-\tan^2z}{1+\tan^2z}=1-\cos 2z\end{cases}$$

$\Rightarrow \tan^2 x\geqslant\tan^2 y\geqslant\tan^2 z\geqslant\tan^2 x\Rightarrow tan^2x=\tan^2 y=\tan^2 z$

$$\Rightarrow 1-\cos 2x=1-\cos 2y=1-\cos 2z=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\pi\\ y=l\pi\\ z=m\pi\end{cases}\quad(k,l,m\in\mathbb{Z})$$

Thử lại ta thấy (XX) có nghiệm $(x;y;z)=(k\pi;l\pi;n\pi)$ $(k,l,m\in\mathbb{Z})$ □

Bài 21: Giải hệ phương trình $(XXI)\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases}$

Giải

Với $x = 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} 1 - e^{-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^z = 0 \end{cases}$$

Xét hàm $f(y) = 1 - e^{-y} - y$ $(y \in \mathbb{R})$.
Ta có: $f'(y) = e^{-y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0$
Do $f(y)$ đồng biến trên $(-\infty; 0]$ và nghịch biến trên $[0; +\infty)$ nên $\text{Max} f(y) = 0$ và do đó phương trình $f(y) = 0$ có nghiệm duy nhất $y = 0 \Rightarrow z = 0$.
Vậy (0;0;0) là một nghiệm của phương trình.
Với $x \neq 0$, hệ phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} e^x = \dfrac{ye^y}{e^y - 1} \\ e^y = \dfrac{ze^z}{e^z - 1} \\ e^z = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \end{cases}$$

Xét hàm $g(t) = \dfrac{te^t}{e^t - 1}(t \neq 0)$.
Ta có: $g'(t) = \dfrac{e^t(e^t - t - 1)}{(e^t - 1)^2} > 0\ \forall t \neq 0($ vì $e^t > t + 1\ \forall t \neq 0)$ $\lim\limits_{t \to 0^-} g(t) = 1; \lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 1$
Dễ thấy $g(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và trên $(0; +\infty)$
Suy ra: nếu $x > y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow e^z > e^x \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) > g(x) \Rightarrow e^y > e^z \Rightarrow y > z \Rightarrow y > x$(mâu thuẫn).
Tương tự, nếu $x < y$ cũng suy ra mâu thuẫn.
Vậy $x = y \Rightarrow y = z$ và hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x = y = z \neq 0 \\ e^x - 1 = x \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in \varnothing$.
Vậy (0;0;0) là nghiệm duy nhất của phương trình.
Sau đây ta cùng xem qua một số bài hệ phương trình chứa tham số:

Bài 22: Cho $a, b, c > 0$. Giải hệ phương trình: $(XXII)\begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - xz = b \\ z^2 - yx = c \end{cases}$

Giải

Ta có: $a^2 - bc = (x^2 - yz)^2 - (y^2 - xz)(z^2 - yx) = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$
$b^2 - ac = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, $c^2 - ab = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$
Đặt $k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, ta có: $(a^2 - bc)^2 - (b^2 - ac)(c^2 - ab) = a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

Suy ra $k^2\left(x^2-yz\right)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)\Rightarrow k=\pm\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}$.
Vậy hệ phương trình có các nghiệm là
$x=\dfrac{a^2-bc}{k},y=\dfrac{b^2-ac}{k},z=\dfrac{c^2-ab}{k}$ với $k=\pm\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}$ □.

Bài 23: Giải và biện luận hệ phương trình theo m: $(XXIII)\begin{cases}mx=z+\dfrac{1}{z}\\ my=x+\dfrac{1}{x}\\ mz=y+\dfrac{1}{y}\end{cases}$

Giải

Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases}mxz=z^2+1\\ myx=x^2+1\\ mzy=y^2+1\\ x.y.z\neq 0\end{cases}$$
$\Rightarrow mxy>0;myz>0;mzx>0\Rightarrow m^3x^2y^2z^2>0\Rightarrow m>0.$
Ta thấy x,y,z cùng dấu và nếu $(x;y;z)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $(-x;-y;-z)$ cũng là nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét $x,y,z>0$. Giả sử $x=\max\{x;y;z\}$.
⋇ Nếu $x\geqslant y\geqslant z>0$:
$\Rightarrow y^2+1\geqslant z^2+1\Rightarrow myz\geqslant mxz\Rightarrow y\geqslant x\Rightarrow y=x$
$\Rightarrow y^2+1=x^2+1\Rightarrow myx=myz\Rightarrow x=z\Rightarrow x=y=z.$
⋇ Nếu $x\geqslant z\geqslant y>0$:
$\Rightarrow x^2+1\geqslant z^2+1\Rightarrow myx\geqslant mxz\Rightarrow y\geqslant z\Rightarrow y=z$
$\Rightarrow y^2+1=z^2+1\Rightarrow myz=mxz\Rightarrow x=y\Rightarrow x=y=z.$
Cả hai trường hợp đều suy ra $x=y=z$.
Do đó hệ phương trình trở thành
$$\begin{cases}mx^2=x^2+1\\ x=y=z>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)x^2=1\\ x=y=z>0\end{cases}$$
* Với $0<m\leqslant 1$, hệ phương trình vô nghiệm.
* Với $m>1$, hệ phương trình tương đương $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{m-1}}$.
Tóm lại:
Với $m\leqslant 1$: hệ phương trình vô nghiệm.
Với $m>1$, hệ phương trình có hai nghiệm là $(\dfrac{1}{\sqrt{m-1}};\dfrac{1}{\sqrt{m-1}};\dfrac{1}{\sqrt{m-1}})$ và $(-\dfrac{1}{\sqrt{m-1}};-\dfrac{1}{\sqrt{m-1}};-\dfrac{1}{\sqrt{m-1}})$ □.

Bài 24: Giải hệ phương trình $(XXIV)\begin{cases}x^2=y+a\\ y^2=z+a\quad(0<a<1)\\ z^2=x+a\end{cases}$

Giải

Giả sử $x = \max\{x; y; z\}$.

Từ hệ phương trình suy ra $z^2 = max\{x^2; y^2; z^2\}$.

⋇ Nếu $z \geqslant 0$:

Ta có $z^2 = max\{x^2; y^2; z^2\} \Rightarrow z = max\{x; y; z\} \Rightarrow x = z \Rightarrow x^2 = z^2$
$\Rightarrow y + a = x + a \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = z$.

Từ hệ phương trình ta có: $x^2 = x + a \Rightarrow x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Suy ra: $x = y = z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$

⋇ Nếu $z < 0$:

Giả sử $x \geqslant 0$, khi đó $z^2 = x + a \geqslant a \Rightarrow z \leqslant -\sqrt{a} < -a \Rightarrow y^2 = z + a < 0$ (vô lý).Do đó $x < 0$. Vì $x = \max\{x; y; z\}$, $x < 0$ nên $y < 0$. Khi đó ta có: $z \leqslant y \leqslant x < 0 \Rightarrow y^2 = z + a \leqslant x^2 = y + a \Rightarrow x \leqslant y$.

Suy ra $x = y = z = x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}; -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}; -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}\right)$ □.

Sau đây là một số hệ phương trình hoán vị không mẫu mực. Ta không thể dùng nguyên lí cực hạn, nhưng vẫn có thể dùng lượng giác hoá, bất đẳng thức. Nhưng cách giải chủ yếu vẫn là biến đổi đẳng thức, dựa vào quan hệ giữa các phương trình.

Bài 25: Giải hệ phương trình $(XXV)\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) (1) \\ xy + yz + zx = 1\,(2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $xyz \neq 0$

Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là một nghiệm của hệ và từ (1) suy ra x, y, z cùng dấu nên ta chỉ cần xét x, y, z dương là đủ.

Đặt: $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \\ z = \tan\gamma \end{cases}, \alpha; \beta; \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right) = 4\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\beta}\right) = 5\left(\tan\gamma + \frac{1}{\tan\gamma}\right) (3) \\ \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1\,(4) \end{cases}$$

Lại có:

$$(3) \Leftrightarrow 3.\frac{\tan^2\alpha + 1}{\tan\alpha} = 4.\frac{\tan^2\beta + 1}{\tan\beta} = 5.\frac{\tan^2\gamma + 1}{\tan\gamma} \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma} \quad (5)$$

Từ (4) ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \tan\alpha\left(\tan\beta+\tan\gamma\right)=1-\tan\beta\tan\gamma$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}=\cot\left(\beta+\gamma\right)$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\ (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ là các góc trong một tam giác vuông, có các cạnh là 3, 4, 5 Do đó:

$$2\gamma=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\gamma=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\tan\gamma=1=z$$

Từ đó ta có:

$$\begin{cases}\tan\beta=y=\dfrac{1}{2}\\ \tan\alpha=x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x;y;z)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$ □

Bài 26: Giải hệ phương trình $(XXVI)\begin{cases}ab(a+b)=6\\ bc(b+c)=30\\ ac(a+c)=12\end{cases}$

Giải

Rõ ràng a,b,c không thể bằng 0. Đặt $S=a+b+c, P=abc$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}\dfrac{P}{c}(S-c)=6\\ \dfrac{P}{a}(S-a)=30\\ \dfrac{P}{b}(S-b)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\dfrac{PS}{P+6}\\ a=\dfrac{PS}{P+30}\\ b=\dfrac{PS}{P+12}\end{cases}$$

Như vậy $S=S\left(\dfrac{P}{P+6}+\dfrac{P}{P+12}+\dfrac{P}{P+30}\right)$

Nếu $S=0$ thì $a+b=-c$, khi đó phương trình đầu tiên trở thành $abc=-6$ và hai phương trình còn lại là $abc=-30$ và $abc=-12$ điều này không thể xảy ra.

Do đó $\dfrac{P}{P+6}+\dfrac{P}{P+12}+\dfrac{P}{P+30}=1$

Biến đổi và thu gọn ta được $P^3+24P^2-1080=0\Leftrightarrow(P-6)(P^2+30P+180)=0$

⁎ Với $P=6$ ta có $a=\dfrac{S}{6}, b=\dfrac{S}{3}, c=\dfrac{S}{2}\Rightarrow ab(a+b)=\dfrac{S^3}{36}=6\Rightarrow S=6$

Vậy $(a,b,c)=(1,2,3)$.

⁎ Với $P^2+30P+180=0\Rightarrow P=-15+3\sqrt{5}; P=-15-3\sqrt{5}$

⋇ Với $P = -15 + 3\sqrt{5}$ ta có

$$\begin{cases} a = \dfrac{-15+3\sqrt{5}}{15+3\sqrt{5}}S = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}S \\ b = \dfrac{-15+3\sqrt{5}}{-3+3\sqrt{5}}S = -\sqrt{5}S \\ c = \dfrac{-15+3\sqrt{5}}{-9+3\sqrt{5}}S = \dfrac{\sqrt{5}+5}{2}S \end{cases}$$

Kết hợp $ab(a+b) = 6$ ta có $-\sqrt{5}S^3 = 6 \Leftrightarrow S = \sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}$

Vậy $(a, b, c) = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \sqrt{5}\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}\right)$

Tương tự với $P = -15 - 3\sqrt{5}$ ta tìm được $(a, b, c) = \left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \sqrt{5}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}\right)$

Kết luận: Hệ có nghiệm

$(a; b; c) = \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \sqrt{5}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}\right), \left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \sqrt{5}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}.\sqrt[6]{\dfrac{36}{5}}\right)$ □

Bài 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 = 2y(x^2+1) - (z^2+1) \ (1) \\ 2y^4 = 3z(y^2+1) - 2(x^2+1) \ (2) \\ 2z^5 = 4x(z^2+1) - 3(y^2+1) \ (3) \end{cases}$

Giải

Xét 6 trường hợp:

⋇ Nếu $y \leqslant x \leqslant z$:

Từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} &0 = 2y(x^2+1) - (z^2+1) - 2x^3 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 2x(x^2+1) - (z^2+1) - 2x^3 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 2x(x^2+1) - (x^2+1) - 2x^3 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$

⋇ Nếu $y \leqslant z \leqslant x$:

$\Rightarrow 2x^3 + z^2 + 1 \geqslant 2x^3 + z^2 + 1 \ (*)$

Từ (1) ta có $2x^3 + z^2 + 1 = 2y(x^2+1) = 2yx^2 + 2y$

Lại có:

$$\begin{cases} 2yx^2 + 2y \leqslant 2x^3 + 2y \\ 2yx^2 + 2y \leqslant 2x^3 + 2z \\ 2yx^2 + 2y \leqslant 2x^3 + z^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^3 + z^2 + 1 \leqslant 2x^3 + z^2 + 1$$

Kết hợp $(*)$ suy ra $x = z$, nghĩa là $x = y = z = 1$.

⋇ Nếu $z \leqslant y \leqslant x$:

Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} &0 = 3z(y^2+1) - 2y^4 - 2(x^2+1) \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 3y(y^2+1) - 2y^4 - 2(x^2+1) \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 3z(y^2+1) - 2y^4 - 2(y^2+1) = -(2y^2+y+2)(y-1)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$
⁎ Nếu $z \leqslant x \leqslant y$:
Từ (2) ta có

$$0 = 8[3z(y^2+1) - 2y^4 - 2(x^2+1)] \Rightarrow 0 \leqslant 8[3x(y^2+1) - 2y^4 - 2(x^2+1)]$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant -(3y^2+1-4x)^2 - 16(y-x) - [7(y+1)^2+8](y-1)^2$$

Từ đó suy ra $y = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$
⁎ Nếu $x \leqslant y \leqslant z$:
Từ (3) ta có

$$\begin{aligned}&0 = 4x(z^2+1) - 3(y^2+1) - 2z^5\\&\Rightarrow 0 \leqslant 4y(z^2+1) - 3(y^2+1) - 2z^5\\&\Rightarrow 0 \leqslant -(2z^3+4z^2+2z+3)(z-1)^2 - (z-y)\left[\left(2z-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{4}\right]\end{aligned}$$

Do đó $y = z \Rightarrow x = y = z = 1$
⁎ Nếu $x \leqslant z \leqslant y$:
Từ (3) ta có

$$\begin{aligned}&0 = 4x(z^2+1) - 3(y^2+1) - 2z^5\\&\Rightarrow 0 \leqslant 4z(z^2+1) - 3(y^2+1) - 2z^5\\&\Rightarrow 0 \leqslant 4x(z^2+1) - 3(z^2+1) - 2z^5\\&\Rightarrow 0 \leqslant -(2z^3+4z^2+2z+3)(z-1)^2\end{aligned}$$

Từ đó có $x = y = z = 1$.
Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất $(x;y;z) = (1;1;1)$ □.

Bài 28: Giải hệ phương trình $(XXVIII)$ $\begin{cases}x^2+y^2+xy=37\,(1)\\x^2+z^2+xz=28\,(2)\\y^2+z^2+yz=19\,(3)\end{cases}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}&(1)-(2) \Rightarrow y^2-z^2+x\,(y-z)=9 \Leftrightarrow (y-z)\,(x+y+z)=9\,(4)\\&(2)-(3) \Rightarrow x^2-y^2+z\,(x-y)=9 \Leftrightarrow (x-y)\,(x+y+z)=9\,(5)\end{aligned}$$

Lại có:

$$(4)-(5) \Rightarrow [(y-z)-(x-y)]\,(x+y+z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y+z=0\\y-z=x-y\end{array}\right.$$

⁎ Nếu : $x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-(x+y)$
Thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy=37\\x^2+y^2+xy=28 \text{ (vô nghiệm)}\\x^2+y^2+xy=19\end{cases}$$

⋇ Nếu $y - z = x - y = t : \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + t \\ z = y - t \end{cases}$

Thay vào (4) ta được:

$$t\left(y + y + t + y - t\right) = 9 \Leftrightarrow ty = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{y}\,(6)$$

Thay vào (3) ta được:

$$y^2 + \left(y - t\right)^2 + y\left(y - t\right) = 19 \Leftrightarrow 3y^2 - 3ty + t^2 = 19 \Leftrightarrow 3y^2 + t^2 = 28\,(7)$$

Thay (6) vào (7) ta được:

$$3y^2 + \frac{9}{y^2} = 28 \Leftrightarrow 3y^4 - 28y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow t = \pm 1 \\ y^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \pm 3\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Xét 4 trường hợp $(y;t) = (3;1), (-3;-1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 3\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -3\sqrt{3}\right)$ ta tìm được nghiệm của hệ là

$(x;y;z) = (4;3;2)\,, (-4;-3;-2)\,, \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ □

Bài tập tự luyện

Bài 1:. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x - 2 = 3y - 3^x \\ 2^y - 2 = 3x - 3^y \end{cases}$ (OLP 30-4-2008 T130)

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 9(y^2 - 3y + 3) = 0 \\ y^3 - 9(z^2 - 3z + 3) = 0 \\ z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \end{cases}$ (OLP 30-4-2010)

Bài 4: Cho 100 số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ thỏa mãn: $\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0 \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0 \\ .... \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0 \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geqslant 0 \end{cases}$.

Tính các số $a_2, a_3, ..., a_{100}$ biết $a_1 = 1$

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x - 3y} = x^2 \\ \dfrac{3y - z}{y - 3z} = y^2 \\ \dfrac{3z - x}{z - 3x} = z^2 \end{cases}$ (THTT 12-2010).

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = \dfrac{4x^2}{4x^2+1} \\ z = \dfrac{4y^2}{4y^2+1} \\ x = \dfrac{4z^2}{4z^2+1} \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ TRONG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2}\,(x-y)\,(1+4xy) = \sqrt{3} & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Giải

Đặt $x = \cos\alpha; y = \sin\alpha$ ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)(1+2\sin 2\alpha) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^0).2\left(\frac{1}{2} + \sin 2\alpha\right) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&4\sin(\alpha - 45^0)(\sin 2\alpha + \sin 30^0) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&8\sin(\alpha - 45^0).\sin(\alpha + 15^0)\cos(\alpha - 15^0) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&4\cos(\alpha - 15^0)[\cos 60^0 - \cos(2\alpha - 30^0)] = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&2\cos(\alpha - 15^0) - 4\cos(\alpha - 15^0).\cos(2\alpha - 30^0) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&-2\cos(3\alpha - 45^0) = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l} \alpha = 65^0 + k120^0 \\ \alpha = -35^0 + l120^0 \end{array}\right. \quad (k, l \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (\sin 65^0; \cos 65^0), (\sin 185^0; \cos 185^0), (\sin 305^0; \cos 305^0)$, $(\sin 85^0; \cos 85^0), (-\sin 35^0; \cos 35^0), (\sin 205^0; \cos 205^0)$. □

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$

Giải

Biến đổi hệ đã cho ta thu được

$$\begin{cases} x^3+y^3-xy(x+y) = 3 \\ x^3+y^3+xy(x+y) = 15 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x^3+y^3 \\ v = xy(x+y) \end{cases}$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v = 15 \\ u-v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 6 \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ xy(x+y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2),(2;1)$. □

Bài 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} y\neq 0 \\ x+\dfrac{1}{y}\geqslant 0 \\ x+y-3\geqslant 0 \end{cases}$ $(*)$

Biến đổi hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ x+\dfrac{1}{y}+x+y-3=5 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}\geqslant 0 \\ v=\sqrt{x+y-3}\geqslant 0 \end{cases}$ Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \end{array} \right. \text{ thỏa mãn } (*)$$

• Nếu $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ x+y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \end{array} \right.$ (thỏa $(*)$)

• Nếu $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1 \\ x+y-3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4-\sqrt{10} \\ y=3+\sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4+\sqrt{10} \\ y=3-\sqrt{10} \end{cases} \end{array} \right.$ (thỏa $(*)$)

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y)=(3;1)$, $(5;-1)$, $(4-\sqrt{10};3+\sqrt{10})$, $(4+\sqrt{10};3-\sqrt{10})$. □

Bài 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $xy > 0$
Đặt: $u = \log_3(xy) \Leftrightarrow xy = 3^u$
Khi đó, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 3(x+y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ (x+y)^2 - 3(x+y) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} \\ y = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \\ y = 3 + \sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3 + \sqrt{6}; 3 - \sqrt{6})$, $(3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6})$. □

Bài 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1 \\ x + y = \dfrac{y}{x^2 + 1} + 2 \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy $y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ x + y = \dfrac{y}{x^2 + 1} + 2 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{x^2 + 1}{y}$, $v = x + y$. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ v = \dfrac{1}{u} + 2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được $u = 1, v = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{y} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$, $(-2; 5)$. □

Bài 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1} + \dfrac{2y}{x} = 1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y} = 4 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $xy \neq 0$

Đặt $a = x^2 + y^2 - 1$, $b = \dfrac{x}{y}$ với $ab \neq 0$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

• Nếu $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = -1 \\ x = -1; y = 1 \end{array} \right.$

• Nếu $\begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 1 \\ x = -3; y = -1 \end{array} \right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; -1), (-1; 1), (3; 1), (-3; -1)$. □

Bài 7: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy $(0; 0)$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình đầu cho x, hai vế của phương trình thứ hai cho x^2, ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{x} + y = 3 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{x^2} + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{y}{x}\right) + y = 3 \\ \left(x + \dfrac{y}{x}\right)^2 + y = 5 \end{cases}$$

Đặt $z = x + \dfrac{y}{x}$, ta thu được hệ

$$\begin{cases} z + y = 3 \\ z^2 + y = 5 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có $\left[\begin{array}{l} z = 2; y = 1 \\ z = -1; y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = 1$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 1)$. □

Bài 8: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y+2x^2+3y-15=0 \\ x^4+y^2-2x^2-4y-5=0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} (x^2-1)(y-2)+4(x^2-1)+4(y-2)=5 \\ (x^2-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases}$$

Đặt $u=x^2-1$, $v=y-2$
Hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ uv+4(u+v)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=10 \\ uv+4(u+v)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=-10 \\ uv=45 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=2 \\ uv=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

• Nếu $u=3; v=-1$ ta tìm được $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-2;1)$
• Nếu $u=-1; v=3$ ta tìm được$(x;y)=(0;5)$.
Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;1)$, $(-2;1)$, $(0;5)$. □

Bài 9: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant \frac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$ với $t \geqslant 0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} t-y(1+2t)=-8 \\ y^2+yt+t^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y-2ty=-8 & (1) \\ (t-y)^2+3ty=12 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$2(t-y)^2+3(t-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-y=0 \\ t-y=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

• Với $t=y$, ta có: $t=y=2$. Khi đó: $\sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=2$.

• Với $y=t+\frac{3}{2}$, có $4t^2+6t-13=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3+\sqrt{61}}{4}$ (do $t \geqslant 0$). Khi đó:

$$t=\frac{-3+\sqrt{61}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2}+\frac{-3+\sqrt{61}}{4} \\ \sqrt{2x-1}=\frac{-3+\sqrt{61}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3+\sqrt{61}}{4} \\ x=\frac{43-3\sqrt{61}}{16} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{5}{2};2\right), \left(\frac{43-3\sqrt{61}}{16};\frac{3+\sqrt{61}}{4}\right)$. □

Bài 10: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\frac{3}{2} \\ y+2(x-2)\sqrt{x+2}=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant -2$, $y \geqslant -2$
Đặt $u=\sqrt{x+2}$, $v=\sqrt{y+2}$ với $u, v \geqslant 0$ $(*)$
Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2-v=\frac{7}{2} \ (1) \\ v^2+2(u^2-4)u=\frac{1}{4} \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), thu được:

$$\left(u^2-\frac{7}{2}\right)^2+2u^3-8u=\frac{1}{4} \Leftrightarrow u^4+2u^3-7u^2-8u+12=0$$
$$\Leftrightarrow (u-1)(u-2)\left(u^2+5u+6\right)=0 \Leftrightarrow u=1 \vee u=2$$

- Với $u=1$ thay vào (1) có $v=-\frac{5}{2}$, không thỏa $(*)$.
- Vơi $u=2$ thay vào (1) có $v=\frac{1}{2}$, thỏa $(*)$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x;y)=\left(2;\frac{7}{4}\right)$. □

Bài 11: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2-x(y-1)+y^2=3y \\ x^2+xy-3y^2=x-2y \end{cases}$$

Giải

Xét $y=0 \Rightarrow x=0$.
Xét $y \neq 0$. Đặt $t=\frac{x}{y} \Leftrightarrow x=ty$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} y^2(2t^2-t+1)=y(3-t) & (1) \\ y^2(t^2+t-3)=y(t-2) & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $\begin{cases} t-2\neq 0 \\ t^2+t-3\neq 0 \end{cases}$. Chia (1) cho (2) vế theo vế ta được

$$\frac{2t^2-t+1}{t^2+t-3}=\frac{3-t}{t-2} \Leftrightarrow 3t^3-7t^2-3t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

Hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;1),\ (-1;1),\ \left(\frac{7}{43};\frac{3}{43}\right)$. □

Bài 12: Giải hệ phương trình

$$(I)\begin{cases} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2 & (1)\\ \sqrt{x-y^2}+x=3 & (2)\end{cases}$$

Giải

Từ (2) ta có: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-y^2}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3\\ x^2+y^2-7x+9=0\end{cases}$

Từ (1) ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 2-\sqrt{(xy^2+y^2+1)(xy^2-y^2+1)}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(xy^2+y^2+1)(xy^2-y^2+1)}=2\left[1-\left(3-\sqrt{2}\right)y^2+xy^2\right]\ (*)$$

Đặt $\begin{cases} u=xy^2+1\\ v=y^2\end{cases}$. Phương trình (*) trở thành:

$$\sqrt{(u+v)(u-v)}=2\left[u-\left(3-\sqrt{2}\right)v\right]$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-\left(3-\sqrt{2}\right)v\geqslant 0\\ u^2-v^2=4\left[u-\left(3-\sqrt{2}\right)v\right]^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (II)\begin{cases} u-\left(3-\sqrt{2}\right)v\geqslant 0\\ 3u^2-8\left(3-\sqrt{2}\right)uv+\left(45-24\sqrt{2}\right)v^2=0\ (**)\end{cases}$$

Ta thấy $v=0$ không là nghiệm của hê (II) nên

$$(**)\Leftrightarrow 3\left(\frac{u}{v}\right)^2-8\left(3-\sqrt{2}\right)\frac{u}{v}+\left(45-24\sqrt{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v}=3\\ \frac{u}{v}=5-\frac{8\sqrt{2}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{xy^2+1}{y^2}=3\\ \frac{xy^2+1}{y^2}=5-\frac{8\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \frac{xy^2+1}{y^2}=3\ (\text{do } u\geqslant (3-\sqrt{2})v)$$
$$\Leftrightarrow xy^2+1=3y^2\Leftrightarrow (x-3)y^2+1=0\ \ (***)$$

Từ (1) ta có: $y^2=-x^2+7x-9$ thay vào (***) ta được

$$(x-3)\left(-x^2+7x-9\right)+1=0\Leftrightarrow -x^3+10x^2-30x+28=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=4+\sqrt{2}\ (\text{loại})\\ x=4-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Với $x=2\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$
- Với $x=4-\sqrt{2}\Rightarrow y^2=1+\sqrt{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm
$(x;y)=(2;1),(2;-1);\left(4-\sqrt{2};\sqrt{1+\sqrt{2}}\right);\left(4-\sqrt{2};-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$. □

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẲNG THỨC

Nhiều bài hệ phương trình tuy nhìn phức tạp nhưng có thể giải bằng những đẳng thức đơn giản. Mấu chốt giải những bài toán dạng này là ta phải nhìn ra quan hệ giữa các ẩn số, từ đó lập nên những hằng đẳng thức thích hợp. Một số đẳng thức có thể không quen thuộc, nên phương pháp này đòi hỏi kinh nghiệm và sự tinh ý.

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Hệ trên tuy là đối xứng loại I nhưng bậc khá cao, việc đưa về $S=x+y$ và $P=xy$ có thể gặp nhiều khó khăn. Nhưng nếu ta biết đẳng thức sau:
$x^2-xy+y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$ thì bài toán trở nên đơn giản.
⊛ Lời giải: ĐKXĐ: $x,y\neq -1$

Đặt $\dfrac{x}{y+1}=a, \dfrac{y}{x+1}=b$ ta được hệ phương trình mới: $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Từ đó tìm ra nghiệm của hệ là $(x;y)=(0;1);(1;0)$ □

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Cũng như bài 1, việc đưa về $S=x+y$ và $P=xy$ cần nhiều biến đổi phức tạp và rắc rối. Thực ra bản chất bài toán là từ đẳng thức sau:

$$xy=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=1$$

Ta cùng xem kĩ hơn về ý tưởng tạo ra bài toán:
Đầu tiên ta tạo ra 1 phương trình để cho thỏa mãn $xy=1$ chẳng hạn như

$$(xy-1)(x^2+xy+y^2)=0\ (*)$$

Để thêm phần tinh tế cho bài toán ta biến đổi (*) thành $x^2+y^2-x^2y^2=xy(x^2+y^2-1)$
Từ đó lập được hệ phương trình mới:

$$\begin{cases} x^2+y^2-x^2y^2=xy(x^2+y^2-1) \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=1+(x-y)^2 \end{cases}$$

Nhưng muốn che giấu bản chất của bài toán hơn nữa chỉ cần thông qua phép đổi biến đơn giản $(x;y)\to(\frac{1}{x};\frac{1}{y})$

Cuối cùng lại hệ thành $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-1\\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{xy}\end{cases}$

Đây cũng chính là lời giải cho bài 2! □

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{y}-2=\dfrac{2}{xy^2}-xy & (1)\\ \dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}=1 & (2)\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Từ (1) ta có: $(xy-2)(\frac{1}{y^2}+1)=0\Leftrightarrow xy=2$

Nhưng nếu từ đây thế $x=\dfrac{2}{y}$ vào (2) thì sẽ rất phức tạp. Vậy ta thử tìm một quan hệ giữa $\dfrac{1}{x+1}$ và $\dfrac{2}{y+2}$ (vì hai biểu thức này xuất hiện ở (2)). Khi đó ta lại để ý đến đẳng thức sau:

$$xy=2\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=1$$

Đến đây thì mọi chuyện trở nên đơn giản.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $x\neq -1;\ y\neq -2$

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases}xy=2\\ \dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y+2}=1\\ \dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{4}{(y+2)^2}=1\end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x+1};\ b=\dfrac{2}{y+2}$ $(a,b\neq 0)$ ta có

$$\begin{cases}a+b=1\\ a^2+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0;\ b=1\\ a=1;\ b=0\end{array}\right.\ \text{(loại)}$$

Vậy hệ vô nghiệm. □

Bài 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(\dfrac{v^2+1}{u^2}-\dfrac{1+y^2}{v^2}+v^2-u^2\right)\left(\dfrac{u^2}{1+v^2}-\dfrac{v^2}{1+u^2}+\dfrac{1}{v^2-u^2}\right)=9u^2 & (1)\\ u^2+v^2=1 & (2)\end{cases}$$

Giải

⊛ Ý tưởng:
Ta có mệnh đề sau: $(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c})(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})=9 \Leftrightarrow a+b+c=0\ (*)$
* Chứng minh:
Xuất phát từ đẳng thức: $\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}=\frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$
Đặt $x=b-c, y=c-a, z=a-b \Rightarrow x-y=-3c, y-z=-3a, z-x=-3b$
Thế thì

$$\frac{-3a}{b-c}+\frac{-3b}{c-a}+\frac{-3c}{a-b}=\frac{-27abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

Đẳng thức trên tương đương với điều phải chứng minh.
Áp dụng mệnh đề trên ta có lời giải sau:
⊛ Lời giải:
Áp dụng $(*)$ với $a=u^2, b=v^2, c=-1$ từ (1) ta suy ra $9=9u^2$.
Vậy ta có hệ tương đương: $\begin{cases}9=9u^2\\ u^2+v^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\pm 1\\ v=0\end{cases}$
Vậy hệ có nghiệm $(u;v)=(1;0);(-1;0)$ □

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+xy=3 & (1)\\ \frac{4}{5y+9}+\frac{4}{x+6}+\frac{1}{1+(x+1)(y+2)}=\frac{x+1}{2} & (2)\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Từ (1) ta để ý đến cách phân tích quen thuộc là $(x+1)(y+1)=4$.
Ở (2) cũng có $x+1$ và $y+1$ nên ta nghĩ tới đặt $a=x+1;\ b=y+1$. Tuy nhiên mấu chốt của bài toán chính là đặt $c=\frac{1}{4}$ để từ (1) có $abc=1$.
Khi đó ta lại có mệnh đề sau: $abc=1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1.$
Từ đó ta đi đến lời giải:
⊛ Lời giải:
Đặt $x+1=a, y+1=b, \frac{1}{4}=c$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}abc=1\\ \frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{x+1}{2}\end{cases}$$

Lại có:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+a^2bc}=1$$

Thay vào phương trình sau được $1=\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow y=1$
Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$ □

Bài 6: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ (x+y)(1+xy)^4=32\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Rõ ràng không thể giữ nguyên $(1+xy)^4$. Muốn vậy ta chú ý tới đẳng thức $xy+1=\dfrac{2xy+2}{2}=\dfrac{(x+y)^2}{2}$. Đến đây bài toán trở nên đơn giản.
⊛ Lời giải:
Hệ đã cho được viết lại thành: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)(2+2xy)^4=2^9 \end{cases}$
Thay $x^2+y^2=2$ vào phương trình thứ 2 ta có

$$(x+y)(x^2+y^2+2xy)^4=2^9 \Leftrightarrow (x+y)^9=2^9 \Leftrightarrow x+y=2$$

Vậy ta có hệ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$
Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$ □
⊛ Nhận xét: Ý tưởng chính của bài toán chính là dùng phép thế để đưa về đẳng thức đồng bậc. Khi đó việc giải sẽ dễ dàng hơn. Ta xét một số ví dụ tương tự:

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)(4-x^2y^2-2xy)=2y^5 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Xét phương trình thứ hai. Để ý $x+y$ có bậc nhất, $4-x^2y^2-2xy$ có bậc 4 nhưng các hạng tử chưa đồng bậc. Vì vậy ta nghĩ tới phép thế từ phương trình đầu để tạo biểu thức thuần nhất.
⊛ Lời giải: Thay phương trình thứ nhất vào phương trình thứ 2 ta có:

$$\begin{aligned} &(x+y)\left[(x^2+y^2)^2-xy(x^2+y^2)-x^2y^2\right]=2y^5 \\ &\Leftrightarrow (x+y)\left[x^4+y^4+x^2y^2-xy(x^2+y^2)\right]=2y^5 \\ &\Leftrightarrow x^5+y^5=2y^5 \Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình đầu ta tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1),(-1;-1)$ □

Bài 8: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhìn vào hệ ta dễ dàng nghĩ đến việc thế số 1 từ phương trình (2) vào phương trình (1) để có phương trình thuần nhất.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $x+y\neq 0$
Phương trình (2) tương đương với $(x^2+y^2)^2=1$

Thế vào phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned}&\left(3x^3-y^3\right)(x+y)=\left(x^2+y^2\right)^2\\&\Leftrightarrow 3x^4-y^4+3x^3y-xy^3=x^4+y^4+2x^2y^2\\&\Leftrightarrow 2x^4+3x^3y-2x^2y^2-xy^3-2y^4=0\\&\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)\left(2x^2+xy+y^2\right)=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\x=-2y\\2x^2+xy+y^2=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

⋇ Với $2x^2+xy+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ (không thoả $x^2+y^2=1$). Trường hợp này loại.
⋇ Với $x=y$ ta có:

$$2x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\x=y=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

⋇ Với $x=-2y$ ta có:

$$5y^2=1\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{\sqrt{5}};x=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\\y=\dfrac{-1}{\sqrt{5}};x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{-1}{\sqrt{5}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ □

Bài 9: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}x^3+4y-y^3-16x=0\\y^2=5x^2+4\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Hệ phương trình có thể viết lại như sau: $\begin{cases}x^3-y^3=4(4x-y)\ (1)\\y^2-5x^2=4\ (2)\end{cases}$

Từ đó ta nghĩ đến việc thế (2) vào (1) để có phương trình thuần nhất.
⊛ Lời giải:
Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases}x^3-y^3=4(4x-y)\\y^2-5x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=\left(y^2-5x^2\right)(4x-y)\\y^2-5x^2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}21x^3-5x^2y-4xy^2=0\\y^2-5x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(7x-4y)(3x+y)=0\\y^2-5x^2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\y=\dfrac{7x}{4}\\y=-3x\end{array}\right.\\y^2-5x^2=4\end{cases}$$

⋇ Với $x=0$ ta có $y=\pm2$
⋇ Với $y=\frac{7x}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{7x}{4}\right)^2-5x^2=4\Leftrightarrow\frac{-31}{15}x^2=4$ (Vô nghiệm)

⁎ Với $y=-3x \Leftrightarrow (-3x)^2-5x^2=4 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=-3 \\ x=-1; y=3 \end{array}\right.$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(0;2);(0;-2);(1;-3);(-1;3)$ □

Bài 10: Giải hệ phương trình $(I)\left\{\begin{array}{l} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right.$ (Hà Tĩnh TST 07-08)

Giải

Hệ phương trình có thể viết lại như sau: $\left\{\begin{array}{l} x^3-y^3=2(4x+y) \ \ (1) \\ x^2-3y^2=6 \ (2) \end{array}\right.$

Ta nghĩ đến cách đồng bậc (1) bằng cách dùng phép thế từ (2). Nhưng trước đó ta phải làm xuất hiện **số 6** ở (1) nên biến đổi:

$$(I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\left(x^3-y^3\right)=6(4x+y) \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\left(x^3-y^3\right)=\left(x^2-3y^2\right)(4x+y) \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3+x^2y-12xy^2=0 \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-3y)(x+4y)=0 \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3y \\ x=-4y \end{array}\right. \\ x^2-3y^2=6 \end{array}\right.$$

⁎ Với $x=0 \Leftrightarrow y^2=-2$ (vô nghiệm)

⁎ Với $x=3y \Leftrightarrow (3y)^2-3y^2=6 \Leftrightarrow y^2=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1; x=3 \\ y=-1; x=-3 \end{array}\right.$

⁎ Với $x=-4y \Leftrightarrow (-4y)^2-3y^2=6 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{6}{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\dfrac{6}{13}}; x=-4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{6}{13}}; x=4\sqrt{\dfrac{6}{13}} \end{array}\right.$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(3;1);(-3;-1);\left(-4\sqrt{\dfrac{6}{13}};\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right);\left(4\sqrt{\dfrac{6}{13}};-\sqrt{\dfrac{6}{13}}\right)$ □

Bài 11: Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+xy=3 \\ x^5+y^5+15xy(x+y)=32 \end{array}\right.$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta cần tìm mối quan hệ giữa các hạng tử trong hệ. Muốn vậy ta chú ý tới hằng đẳng thức $(x+y)^5=x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

⊛ Lời giải:

Hệ đã cho được viết lại như sau:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+xy=3 \\ x^5+y^5+5.3xy(x+y)=32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+xy=3 \\ x^5+y^5+5xy(x^2+xy+y^2)(x+y)=32 \end{array}\right. \quad (*)$$

Công việc tiêp theo trở nên đơn giản:

$$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (1;1)$ □

Bài 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2\left(y^4 - x^4\right) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = \left(x^2 + 3y^2\right)\left(3x^2 + y^2\right) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Khai triển vế phải của hai phương trình. Để giải bài toán ta chỉ cần chú ý công thức khai triển bậc 5: $\begin{cases} x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = (x+y)^5 \\ x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 = (x-y)^5 \end{cases}$

⊛ Lời giải:

Hệ tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = 3(x^4 + y^4) + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$$

Cộng trừ 2 phương trình ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = 5y^4 + x^4 + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y} = 5x^4 + y^4 + 10x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 5xy^4 + x^5 + 10x^3y^2 \\ 1 = 5yx^4 + y^5 + 10x^2y^3 \end{cases}$$

Lại cộng trừ 2 phương trình ta có:

$$\begin{cases} (x+y)^5 = 3 \\ (x-y)^5 = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2}; \dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2}\right)$ □

Sau đây là một số lời giải bằng cách ghép hằng đẳng thức để tạo ra những đại lượng không âm.

Bài 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 10 = 2y \\ y^2 - 6\sqrt{4y-3} + 11 = x \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + \left(\sqrt{3x-2} - 2\right)^2 + x + 4 = 2y \\ (y-3)^2 + \left(\sqrt{4y-3} - 3\right)^2 + 2y = x + 4 \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình trên vế theo vế ta thu được:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + \left(\sqrt{3x-2} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{4y-3} - 3\right)^2 = 0$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x;y) = (2;3)$ □

Bài 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2\,(1) \\ \dfrac{2}{xy} - \dfrac{1}{z^2} = 4\,(2) \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx} = \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -z$$

Thế vào hệ ta tìm được nghiệm $(x;y;z) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ □

Bài 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2-x)(1-2x)(2+y)(1+2y) = 4\sqrt{10z+1}\,(1) \\ x^2+y^2+z^2+2xz+2yz+x^2y^2+1 = 0\,(2) \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (x+y+z)^2+(xy-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -(x+y) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Thay vào (1), ta được:

$$(2-x)(1-2x)\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right) = 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow (2-x)(1-2x)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x}\right) = 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(4-x^2)(1-4x^2)}{x^2} = 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17 = 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,(3)$$

Đặt: $t = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} |t| \geqslant 2 \\ x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2 \end{cases}$.

Từ đó ta có:

$$(3) \Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)-17 = 4\sqrt{1-10t}$$
$$\Leftrightarrow 4t^2-25 = 4\sqrt{1-10t}$$
$$\Leftrightarrow \left(4t^2-25\right)^2-16(1-10t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(4t^2-20t+29\right)(2t+3)(2t+7) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{2}\,(do\,|t| \geqslant 2) \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} = -\frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+7x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$$

⊛ Với $x = \dfrac{-7+\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{-7-\sqrt{33}}{4} \Rightarrow z = \dfrac{7}{2}$

⊛ Với $x = \dfrac{-7-\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{-7+\sqrt{33}}{4} \Rightarrow z = \dfrac{7}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là

$(x;y;z) = \left(\dfrac{-7+\sqrt{33}}{4}; \dfrac{-7-\sqrt{33}}{4}; \dfrac{7}{2}\right), \left(\dfrac{-7-\sqrt{33}}{4}; \dfrac{-7+\sqrt{33}}{4}; \dfrac{7}{2}\right)$ □.

Bài tập tự luyện

Giải hệ phương trình:

1) $\begin{cases} xy - x = 2 \\ \dfrac{1}{(x+1)^4} + \dfrac{16}{(y+1)^4} = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + 5xy^2 - 3y^3 = 2x - y \\ x^2 + 2xy = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = \dfrac{31}{7} \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 - 4x - y = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 8x^2 + x^5 = 8y^2 + y^5 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

Lý thuyết

▶ **Định lý 1**: Nếu hàm số y=f(x) luôn đồng biến (hoặc luôn ngịch biến) thì số nghiệm của phương trình : $f(x) = k$ không nhiều hơn một và $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

▶ **Định lý 2**: Nếu hàm số y=f(x) luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và hàm số y=g(x) luôn ngịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình: f(x)=g(x) không nhiều hơn một.

▶ **Định lý 3**: Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm đến cấp n và pt $f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm, khi đó pt $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là m+1 nghiệm.
Như vậy, bản chất của vấn đề chính là việc phân tích

$$g(x) = h(y) \Leftrightarrow f(p(x)) = f(q(y))$$

Sau đó ta sẽ xét tính đồng biến , nghịch biến của hàm đặc trưng $f(x)$. Trong đó để tiện cho việc đánh giá thì ta thường biến đổi hàm đặc trưng $f(x)$ thành một hàm đa thức .Và để có thể làm được điều đó thì chúng ta cần sử dụng , kết hợp khéo léo 2 kĩ thuật **đặt ẩn phụ** và **hệ số bất định**.
⊛ Chú ý: Hàm số đặc trưng $f(x)$ không có tính duy nhất , tức là nếu từ một phương trình nào đó ta rút ra được 1 hàm số đặc trưng thì chắc chắn còn có thể tìm được hàm số thứ 2, và vấn đề của chúng ta là làm sao có thể tìm được 1 hàm số đơn giản về mặt ý tưởng , cũng như đơn giản trong việc đánh giá (xét tính đơn điệu) của nó trong bài toán.

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$(I)\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \ (1) \\ \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{y+8}} \ (2) \end{cases}$$ (Olympic 30-4 năm 2005)

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy bài toán dạng này rất đặc trưng cho phương pháp được nêu và cách ra đề này cũng thường hay được sử dụng trong các đề thi CĐ – ĐH, thi HSG. Điều quan trọng là cần chứng minh được x = y từ hệ trên.
⊛ Lời giải:
ĐK: $\begin{cases} -1 \leqslant y \\ \sqrt{y+8} \leqslant x \end{cases}$
Từ phương trình ban đầu ta được : $\tan x + x = \tan y + y$
Như vậy hàm đặc trưng của phương trình là $f(t) = tant + t$.
Lại có $f'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + 1 > 0$ nên $f(t)$ là một hàm đồng biến trên tập xác định, suy ra $x = y$.
Thế vào (2) ta có:

$\sqrt{y+1}-1=\sqrt{y-\sqrt{y+8}} \Leftrightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{y-\sqrt{y+8}}+1 \Leftrightarrow y+8=4y-4\sqrt{y+8}$

$\Leftrightarrow 3y-8=4\sqrt{y+8} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant \dfrac{8}{3} \\ 9y^2-48y+64=16y+128 \end{cases} \Leftrightarrow y=8$

Vậy $x=y=8$ là nghiệm duy nhất của (I) □.

⊛ Nhận xét: Ở bài toán trên bản chất của vấn đề đã được thể hiện rất rõ ràng ngay ở phương trình đầu tiên. Nên có thể nhận xét rằng đây là một bài toán dễ trong việc nhận ra ý tưởng của phương pháp.

Bài 2: Giải hệ phương trình $(II)\begin{cases} (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1 \ (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhìn qua ta thấy (2) có vẻ dễ khai thác hơn thông qua việc bình phương để tìm quan hệ giữa x,y. Nhưng thật ra mấu chốt của bài toán lại là (1). Chỉ cần để ý rằng $\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=-y+\sqrt{y^2+1}$ thì ta đã giải quyết xong.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $6x-2xy+1 \geqslant 0$ $(*)$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow f(x)=f(-y)$ với $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$

Lại có: $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}} \geqslant 0$ do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f(x)=f(-y) \Leftrightarrow x=-y$. Thế vào (2) ta có:

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25x^2}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1}=3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \end{array}\right.$$

⋇ Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+6x+1=9x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$

⋇ Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+6x+1=4x^2 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$

Thử lại $(*)$ ta thấy (II) có nghiệm $(x;y)=(1;-1);(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2})$ □

Bài 3: Giải hệ phương trình $(III)\begin{cases} \sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{y-1}+3y \ (1) \\ (x+y)(2x-y)+4=-6x-3y \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy (1) có dạng đơn điệu, nhưng không thể tìm được hàm số đặc trưng. Như vậy rõ ràng ta phải thay đổi x hoặc y. Chuyển qua phân tích (2) thì thấy rằng
(2) $\Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+4)=0$. Vậy ta đã tính được y theo x, từ đó việc xây dựng hàm đặc trưng cho (1) trở nên dễ dàng vì chỉ còn một ẩn.

⊛ Lời giải:

ĐKXĐ: $x \geqslant \frac{1}{3}, y \geqslant 1$ $(*)$.
Ta có:
$(2) \Leftrightarrow (x+y)(2x-y)+4=-4(x+y)-(2x-y) \Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+4)=0$
$\Leftrightarrow y=2x+4$ (do $(*) \Rightarrow x+y+1 \geqslant \frac{7}{3}>0$). Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{3x-1}+2x-8=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 2\,(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2\,(2x+3)+\sqrt{2x+3}$$

Xét hàm số $f\,(t)=2t^2+t$ với $t \geqslant 0$. Phương trình (12) có thể viết lại thành

$$f\left(\sqrt{3x-1}\right)=f\left(\sqrt{2x+3}\right)$$

Ta có $f'\,(t)=4t+1>0\ \forall t>0$ nên hàm số f đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó

$$\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=12.$$

Vậy (III) có nghiệm $(x,y)=(4,12)$ □

Bài 4: Giải hệ phương trình $(IV)\begin{cases} x^3+x-2=y^3+3y^2+4y \ (1) \\ x^5+y^3+1=0 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Rất tự nhiên ta nhìn vào từng PT để đánh giá với mục đích tìm mối quan hệ giữa hai biến.
Từ (1) ta thấy rằng 2 vế là 2 đa thức độc lập của 2 biến x ,y và cùng bậc. Như vậy việc áp dụng phương pháp sử dụng tính đơn điệu có cơ hội thành công rất cao. Và đây cũng là lúc chúng ta dùng tới kĩ thuật hệ số bất định.
Đầu tiên, ta chọn một đa thức bất kì làm chuẩn ở (1). Dễ thấy nên chọn đa thức bên vế trái vì nhìn nó đơn giản hơn. Với ý tưởng đó ta được hàm số đặc trưng $f(t)=t^3+t-2$, như vậy việc của chúng ta cần làm đó là phân tích :

$$y^3+3y^2+4y=g^3(y)+g(y)-2$$

Rõ ràng $g(y)$ có dạng $g(y)=y+b$ từ đây ta khai triển và được $b=1$
Như vậy ta có phương trình $x^3+x-2=(y+1)^3+(y+1)-2$ tới đây thì ý tưởng giải bài toán đã được hoàn thiện.
⊛ Lời giải:
Từ (1) ta có

$$x^3+x-2=(y+1)^3+(y+1)-2 \ (*)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t)=t^3+t-2$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$
Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, Kết hợp với (*) ta được $x=y+1$
Thế vào (2) suy ra:

$$x^5+(x-1)^3+1=0 \Leftrightarrow x^5+x^3-3x^2+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^4+x^2-3x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^4+x^2-3x+3=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy (IV) có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0,1)$. □

Bài 5: Giải hệ phương trình $(V)\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\ (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\ (2)\end{cases}$ (ĐH khối A – 2010)

Giải

⊛ Ý tưởng: Khó có thể khai thác gì từ (2), do đó ta sẽ bắt đầu phân tích từ (1). Phương trình này có x, y tách biệt nên khả năng dùng đơn điệu là cao. Vậy ta biến đổi phương trình về dạng

$$g(x)=h(y)\Leftrightarrow (4x^2+1)x=(3-y)\sqrt{5-2y}$$

Đặt $\sqrt{5-2y}=a\Rightarrow y=\dfrac{5-a^2}{2}$ và $(3-y)\sqrt{5-2y}=(3-\dfrac{5-a^2}{2})a=\dfrac{1+a^2}{2}.a=\dfrac{a^3}{2}+\dfrac{a}{2}$
Ta hi vọng rằng $f(t)=\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t}{2}$ chính là hàm đặc trưng mà ta cần tìm. Vậy cần phải phân tích $(4x^2+1).x=4x^3+x=\dfrac{p(x)^3}{2}+\dfrac{p(x)}{2}$. Rõ ràng $p(x)$ có dạng $mx+n$, dùng hệ số bất định ta thu được $m=2;\ n=0\Rightarrow p(x)=2x$. Như vậy hàm số đặc trưng chính là $f(t)=\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t}{2}$
⊛ Lời giải: ĐK: $x\leqslant\dfrac{3}{4};\ y\leqslant\dfrac{5}{2}$.
Ta có

$$(1)\Leftrightarrow(4x^2+1)x=(3-y)\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\frac{(2x)^3}{2}+\frac{2x}{2}=\frac{\sqrt{(5-2y)^3}}{2}+\frac{\sqrt{5-2y}}{2}$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t)=\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t}{2}$ có $f'(t)=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{1}{2}>0,\forall t\in\mathbb{R}$
Suy ra hàm f(t) là hàm đồng bíến trên $\mathbb{R}$, hay : $2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ 4x^2=5-2y\end{cases}$
Tới đây ta thế vào (2) ta được :

$$4x^2+(\frac{5}{2}-2x^2)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2+(\dfrac{5}{2}-2x^2)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ có $g'(t)>0,\forall x\leqslant\dfrac{3}{4}$ suy ra $g(x)$ đồng biến trên TXĐ , lại có $g(\dfrac{1}{2})=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2$
Vậy V có nghiệm $(x;y)=(\dfrac{1}{2};2)$ □.

Bài 6: Giải hệ phương trình $(VI)\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6(1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6(2)\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Nhìn vào hệ trên ta thấy rằng không thể dùng phép thế. Phương trình 1 có 2 ẩn không độc lập với nên ta nghĩ tới việc thử nhóm lại và phân tích nhân tử, lại có $x-y^2$ là một nhân tử chung, tuy vậy việc phân tích ra là tương đối phức tạp khi phải dùng hằng đẳng thức

liên quan tới $A^5 - B^5$.
Ta cùng xét cách khác đơn giản hơn. Với dự đoán $x = y^2$ là mối quan hệ duy nhất của x ,y ta nghĩ tới dùng đơn điệu. Hãy thử đánh giá:
(1) có hạng tử xy^4 mà trong việc xét hàm đặc trưng ta lại chỉ có thể xét hàm một ẩn như vậy một điều rất tự nhiên là ta tìm cách biến đổi sao cho (1) trở thành PT có 2 ẩn tách biệt. Và chia 2 vế cho y^5 là cách duy nhất giúp chúng ta giải quyết được tất cả vấn đề nêu trên. Ta cùng đi đến lời giải chi tiết:
⊛ Lời giải:
ĐK: $x \geqslant \dfrac{-5}{4}$
Dễ thấy $y = 0$ không thoả hệ. Với y≠ 0 chia cả 2 vế của PT(1) cho y^5 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^5}{y^5} + \frac{x}{y} = y^5 + y \ (*)$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = t^5 + t$ có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$
Suy ra f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$, kết hợp với (*) ta được: $\dfrac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$
Thế vào PT(2) ta được $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \ (**)$
Ta có $x = \dfrac{-5}{4}$ không thoả (**). Đặt $VT(**) = g(x)$.
Ta có $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0 \ \forall x > \dfrac{-5}{4}$ do đó $g(x)$ đồng biến trên $(\dfrac{-5}{4}; +\infty)$
Lại có $g(1) = 6$ nên (**) có nghiệm duy nhất $x = 1$. Suy ra $y = \pm 1$.
Vậy (VI) có nghiệm $(x; y) = (1 : 1); (1; -1)$ □

⊛ Nhận xét: Với những phương trình có bậc cao thì việc hạ bậc và đặt ẩn phụ rất hữu ích. Ta cùng xem qua một số bài tương tự:

Bài 7: Giải hệ phương trình $(VII) \begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right) + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} = 6 \ (1) \\ x^2y\left(2 + 2\sqrt{4y^2+1}\right) = x + \sqrt{x^2+1} \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 0$.
Nếu $x = 0$, từ phương trình thứ hai của hệ ta có $0 = 6$ (sai). Vậy $x > 0$, chia cả hai vế của (2) cho x^2 ta thu được

$$2y\left(1 + \sqrt{4y^2+1}\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) \ (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t\left(1 + \sqrt{1+t^2}\right)$ với $t \in \mathbb{R}$, phương trình (3) có thể viết lại thành

$$f(2y) = f(\frac{1}{x})$$

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, do đó $2y = \dfrac{1}{x}$.Thay vào (1) ta có

$$x^3 + x + 2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} - 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 6 = -2\left(x^2+1\right)\sqrt{x} \ (4)$$

Xét các hàm số $g(x) = x^3 + x - 6, h(x) = -2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$ với $x \in (0; +\infty)$.
Dễ thấy $g(x), h(x)$ đơn điệu ngược chiều trên $(0; +\infty)$ và $g(1) = h(1)$ nên (4) có nghiệm duy

nhất $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy (VII) có nghiệm $(x, y) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ □.

Bài 8: Giải hệ phương trình $(VIII) \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right) = 8x^2y^3 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases}$

Giải

Với $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Với $x \neq 0$ và $y \neq 0$.Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{\sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x}{\sqrt{4y^2+1}-1}.4y^2 = 8x^2y^3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x}{\sqrt{4y^2+1}-1} = 2x^2y$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 4x^2y + x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1} - 2x^2y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x = 2x^2y\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right) = 2y\left(\sqrt{(2y)^2+1}+1\right) \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = t\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)$ có $f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} + 1 = \dfrac{t^2+t+1+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} > 0$

Nên hàm số $f(t) = t\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ phương trình (3) ta có

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow 2xy = 1$$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$$2x^2y - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(4; \dfrac{1}{8}\right)$ □

Bài 9: Giải hệ phương trình $(IX) \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3+3y^2} \ (1) \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^2+8y} \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Chúng ta lại bắt đầu tìm tòi từ cái đơn giản tới phức tạp

Từ (1) để ý rằng ta đã có dạng $g(x) = h(y)$ như mong muốn như vậy ý tưởng dùng tính đơn điệu để xét hàm đặc trưng đã xuất hiện. Và sẽ tốt hơn nếu $g(x), h(y)$ là hàm đa thức. Vậy ta thử bình phương để loại bỏ căn thức:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)^2 = y^3 + 3y^2$$

Công việc tiếp theo là tìm hàm đặc trưng. Dễ thấy $h(y) = y^3 + 3y^2$ là lựa chọn tốt vì đây là hàm số đơn giản và đồng biến trên $[0; +\infty]$.

Ta sẽ cố gắng phân tích $(x^3-3x^2+2)^2 = q^3(x)+3q^2(x)$. Đồng nhất hệ số sẽ tìm được $q(x)=x^2-2x-2$. Suy ra $x^2-2x-2=y$ (chú ý điều kiện có nghiệm là
$x^3-3x^2+2=(x-1)(x^2-2x-2)\geqslant 0 \Rightarrow x^2-2x-2\geqslant 0$ do $x\geqslant 2$).
Nhưng câu hỏi đặt ra là, việc khai triển và đồng nhất hệ số với $(x^3-3x^2+2)^2$ khá phức tạp. Lại chú ý rằng hàm số đặc trưng không phải là duy nhất. Liệu có một hàm số nào đơn giản hơn? Vậy 1 điều tự nhiên là ta sẽ đi tìm cách đặt ẩn phụ : 1 hàm chứa căn nào đó để không phải luỹ thừa.
Để ý rằng (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3}$
Như vậy ta sẽ đặt $a=\sqrt{y+3}\Rightarrow y=a^2-3$, $y\sqrt{y+3}=(a^2-3)a=a^3-3a$
Phân tích hoàn toàn tương tự như các ví dụ trước , ta được $(x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}$ và hàm đặc trưng $f(t)=t^3-3t$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty]$ .Như vậy ý tưởng đã rõ ràng.

⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: $x\geqslant 2;\ y\geqslant 0$
Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3}\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3-3t$ có $f'(t)=3t^2-3\geqslant 0,\forall t\geqslant 1$ (vì $\sqrt{y+3}\geqslant\sqrt{3};\ x-1\geqslant 1$)
Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$, hay $x-1=\sqrt{y+3}\Leftrightarrow y=x^2-2x-2$
Thế vào (2):

$$(2)\Leftrightarrow 9(x-2)=y^2+8y\Leftrightarrow 9(x-2)=(x^2-2x-2)^2+8(x^2-2x-2)\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x^2-17x+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^3-x^2+5x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x^3-x^2+5x-2=0\end{array}\right.$$

Xét $Q(x)=x^3-x^2+5x-2$ có $Q'(x)=3x^2-2x+5>0,\forall x$ suy ra đây là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$
Lại có $x\geqslant 2\Rightarrow Q(x)\geqslant Q(2)=13>0$ suy ra phương trình $Q(x)=0$ vô nghiệm.
Vậy (IX) có nghiệm $(x;y)=(3;1)$ □.
⊛ Nhận xét: Những bài toán trên đã cho thấy có nhiều cách để đưa hai vế của một phương trình về hàm đặc trưng. Tuy nhiên một số bài toán khó hơn sẽ đòi hỏi phải biến đổi các phương trình của hệ để tìm ra hàm đặc trưng.

Bài 10: Giải hệ phương trình $(X)\begin{cases}x^3(2x+3y)=1\\ x(y^3-2)=1\end{cases}$

Giải

⁎ Với $x=0$ dễ thấy không phải là nghiệm của hệ trên.
⁎ Với x $\neq 0$ ta có

$$(X)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3(2+3y)=1\\ x^3(y^3-2)=3x^2\end{cases}\Rightarrow x^3(2+3y+y^3-2)=3x^2+1\Leftrightarrow y^3+3y=\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}$$

Tới đây hàm số đặc trưng đã lộ rõ: $f(t)=t^3+3t$

Có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ tới đây ta chỉ việc thế vào một PT bất kì trong 2 PT thì bài toán sẽ được hoàn tất :

$$(X) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^3(2 + \dfrac{3}{x}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = \dfrac{1}{2}, y = 2 \end{array} \right.$$

Thử lại ta thấy (X) có nghiệm $(x; y) = (-1; -1); (\frac{1}{2}; 2)$ □.

Sau đây ta cùng xem qua một số bài hệ phương trình logarit:

Bài 11: Giải hệ phương trình

$$(XI) \begin{cases} \log_3(2x+1) - \log_3(x-y) + 1 = \sqrt{4x^2+4x+2} - \sqrt{(x-y)^2+1} + (x-y)^2 - 4x(x+1) & (1) \\ \log_3(-2y-2) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} = 1 - \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Phương trình (1) nhìn phức tạp hơn nhưng khả năng nhóm nhân tử lại cao, nên ta sẽ phân tích (1). Dễ thấy biểu thức trong log là không thể thay đổi, do đó ta sẽ lấy $2x + 1$ và $x - y$ làm chuẩn. Việc xây dựng hàm đặc trưng bằng hệ số bất định giống như những bài trên, nên ở đây ta sẽ không nhắc lại.

⊛ Lời giải:

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2+1} - (2x+1)^2 - \log_3(2x+1) = \sqrt{(x-y)^2+1} - (x-y)^2 - \log_3(x-y) \ (*)$$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t^2 - \log_3 t \ (t > 0)$ ta có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \left(2t + \dfrac{1}{t}\right) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} < 0$

nên $f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2x + 1 = x - y \Leftrightarrow x = -y - 1$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} = 1 - \sqrt{2}$.

Xét $g(x) = \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} \ (x > 0)$ ta có $g'(x) = 4x(2 - \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}) + \dfrac{1}{x} > 0$ nên $g(x)$ đồng biến. Lại có $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$ nên (2) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-3}{2}$

Vậy (IX) có nghiệm $(x; y) = (\frac{1}{2}; \frac{-3}{2})$ □.

Bài 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_2(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x + 2y + 6 > 0 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases}$

Xét hàm số: $f(t) = e^t(t+1), t \in [0, +\infty)$. Ta có $f'(t) = e^t(t+1) + e^t = e^t(t+2) > 0$ nên đây là hàm đồng biến.

Do đó:

$$e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \Leftrightarrow e^{x^2}(x^2+1) = e^{y^2}(y^2+1) \Leftrightarrow f(x^2) = f(y^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\begin{aligned}&3\log_2(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1\\&\Leftrightarrow \log_2\left[(x+2y+6)^3\right]=\log_2\left[2(x+y+2)^2\right]\\&\Leftrightarrow (x+2y+6)^3=2(x+y+2)^2\ (*)\end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:
⁎ Nếu $x=y$ thì thay vào (*), ta được: $(3x+6)^3=2(2x+2)^2$.
Theo ĐKXĐ ta có $x>-1$ .Lại có

$$(3x+6)^3-2(2x+4)^2=(x+2)^2(27x+46)>0\Rightarrow(3x+6)^3>2(2x+4)^2$$

Do đó: $(3x+6)^3>2(2x+4)^2>2(2x+2)^2$ nên (*) vô nghiệm.
⁎ Nếu $x=-y$, thay vào (*), ta được:

$$(-x+6)^3=2(2)^2\Leftrightarrow(6-x)^3=8\Leftrightarrow 6-x=2\Leftrightarrow x=4\Leftrightarrow y=-4$$

Thử lại ta thấy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x,y)=(4,-4)$ □
⊛ Nhận xét: Trong bài này nên chú ý các đánh giá trong trường hợp $x=y$, bởi vì khi đó phương trình bậc ba thu được phải giải theo công thức tổng quát, điều thường bị tránh ở các kì thi HSG. Do đó, việc tìm một đánh giá thích hợp để chứng minh nghiệm không thỏa đề bài là một cách rất hay.

Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1) $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0\\4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0\end{cases}$

Bài 2) $\begin{cases}x^3(3y+55)=64\\xy(y^2+3y+3)=12+51x\end{cases}$

Bài 3) $\begin{cases}2x^3-4x^2+4x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}\\\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1\end{cases}$

Bài 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+\sqrt[3]{x+y}=5\\\sqrt{x^2+xy+4}+\sqrt{y^2+xy+4}=12\end{cases}$

Bài 5) $\begin{cases}x^3-y^3-2=3x-3y^2\\x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0\end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Hệ số bất định là nguồn gốc cho nhiều lời giải đẹp. Bài viết này sẽ đề cập đến những biến đổi trong hệ phương trình hữu tỉ dựa vào hệ số bất định. Mục tiêu của chúng ta là sau khi biến đổi thu được một phương trình **có thể phân tích thành nhân tử** hoặc **có Δ chính phương** (nếu là bậc 2). Ta cùng xem qua một số ví dụ:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình $(I)\begin{cases} x^3-y^3=35\ (1) \\ 2x^2+3y^2=4x-9y\ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Không thể dùng phép thế để giải hệ trên. Vì thế ta hi vọng có thể từ hai phương trình của hệ đưa về dạng $(x+a)^3=(y+b)^3$ (để ý rằng x,y độc lập với nhau). Muốn vậy ta nhân (2) cho một số α. Công việc của ta là tìm a,b,α (lưu ý phương trình (1) có bậc 3 (cao nhất) nên ta để mặc định hệ số như cũ, các số a,b,α sẽ được chọn để phù hợp)
Lấy $(1)+\alpha.(2)$ ta được:

$$x^3-y^3-35+\alpha(2x^2+3y^2-4x+9y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2\alpha x^2-4\alpha x-y^3+3\alpha y^2+9\alpha y-35=0\ (*)$$

Ta cần tìm a,b,α thoả:

$$VT(*)=(x+a)^3-(y+b)^3\Leftrightarrow\begin{cases} a^3-b^3=-35 \\ 3a=2\alpha \\ 3a^2=-4\alpha \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=-3 \\ a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

Do đó $(*)$ trở thành: $(x-2)^3-(y+3)^3=0$.
⊛ Lời giải: Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-y^3=35 \\ x-2=y+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y+5 \\ (y+5)^3-y^3=35 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2;y=-3 \\ x=3;y=-2 \end{array}\right.$$

Vậy (I) có nghiệm $(x;y)=(2;-3);(3;-2)$ □
⊛ Nhận xét: Bài toán trên cho ta một cái nhìn tổng quan về hệ số bất định trong hệ phương trình hữu tỉ. Đây là một bài cơ bản vì x,y đứng độc lập. Ta cùng xem qua một bài tương tự:

Bài 2: (VMO 2010) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-y^4=240\ (1) \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y)\ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Như bài trên, do x, y tách biệt nên ta hi vọng từ hai phương trình của hệ đưa về dạng $(x+\alpha)^4=(y+\beta)^4$. Muốn vậy ta nhân phương trình thứ hai cho một số k. Công việc

của ta là tìm các số α, β, k.
Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x^4 + a = y^4 + a + 240 \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 2y^3 - 12y^2 + 32y \end{cases}$$

Suy ra:

$$x^4 + a + k(x^3 - 3x^2 + 4x) = y^4 + a + 240 + k(2y^3 - 12y^2 + 32)\ (*)$$

Cần chọn k sao cho :

$$(x+\alpha)^4 = (y+\beta)^4 \Leftrightarrow x^4 + 4\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + 4\alpha^3 x + \alpha^4 = y^4 + 4\beta y^3 + 6\beta^2 y^2 + 4\beta^3 y + \beta^4\ (**)$$

Từ (*) và (**) đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} a = \alpha^4 \\ k = 4\alpha \\ -3k = 6\alpha^2 \\ 4k = 4\alpha^3 \\ a + 240 = \beta^4 \\ 2k = 4\beta \\ -12k = 6\beta^2 \\ 32k = 4\beta^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -8 \\ \alpha = -2 \\ a = 16 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

⊛ Lời giải:
Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x^4 + 16 = y^4 + 256 \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 2y^3 - 12y^2 + 32y \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ hai nhân cho (-8) cộng với phương trình thứ nhất ta có:

$$x^4 + 16 - 8(x^3 - 3x^2 + 4x) = y^4 + 256 - 8(2y^3 - 12y^2 + 32y)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = y - 4 \\ x - 2 = 4 - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y - 2 \\ x = 6 - y \end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x = y - 2$ thay vào (1) ta được:

$$8y^3 - 24y^2 + 32y + 224 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(8y^2 - 40y + 112) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -4$$

⋇ Nếu $x = 6 - y$ thay vào (1) ta được:

$$y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-4; -2), (4; 2)$ □
⊛ Nhận xét: Ở bài này hoặc các bài tương tự với số mũ lớn hơn hay nhỏ hơn nếu không chứa các hạng tử có dạng $x^m.y^n$ ta đều có thể sử dụng phương pháp trên. Tuy nhiên chỉ cần qua một phép đổi biến hệ sẽ không còn " đẹp" nữa. Chúng ta cùng xét bài toán sau:

Bài 3: Giải hệ phương trình $(II)\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5}\ (1) \\ 4x^2 + 4x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1)\ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Để ý rằng 2 phương trình của hệ đều có bậc hai và xuất hiện cả hạng tử xy nên việc dùng HSBĐ như bài 1 sẽ gặp nhiều khó khăn. Một hướng đi thường dùng của ta với hệ loại này là đưa về phương trình bậc hai theo $(ax+by)$. Để làm điều đó, ta nhân (1) cho α, (2) cho β và cộng lại:

$$(1).\alpha + (2).\beta \Leftrightarrow \alpha\left(x^2+y^2-\frac{1}{5}\right)+\beta\left(4x^2+3xy+3x+y-\frac{57}{25}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left[\left(1+\frac{4\beta}{\alpha}\right)x^2+\frac{3\beta}{\alpha}xy+y^2\right]+\beta(3x+y)-\frac{\alpha}{5}-\frac{57\beta}{25}=0$$

Đã xuất hiện hạng tử $ax+by$ chính là $\beta(3x+y)$. Do đó ta hi vọng có

$$\left(1+\frac{4\beta}{\alpha}\right)x^2+\frac{3\beta}{\alpha}xy+y^2=k(3x+y)^2$$

Để ý rằng hệ số của y^2 là 1 nên $k=1$. Khai triển và đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases}1+\dfrac{4\beta}{\alpha}=9\\ \dfrac{3\beta}{\alpha}=6\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

Vậy ta đã tìm được α,β.

⊛ Lời giải: Lấy $(1)+(2).2$ ta được

$$(3x+y)^2+2(3x+y)-\frac{119}{25}=0\Leftrightarrow\left(3x+y-\frac{7}{5}\right)\left(3x+y+\frac{17}{5}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+y=\dfrac{7}{5}\\ 3x+y=\dfrac{-17}{5}\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $3x+y=\dfrac{7}{5}$:

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{5}\\ y=-3x+\dfrac{7}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5};\ y=\dfrac{1}{5}\\ x=\dfrac{11}{25};\ y=\dfrac{2}{25}\end{array}\right.$ ⋇ Nếu $3x+7=\dfrac{-17}{5}$:

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{5}\\ y=-3x-\dfrac{17}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3x-\dfrac{17}{5}\\ 10x^2+\dfrac{102x}{5}+\dfrac{284}{25}=0\end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy (II) có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right);\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{25}\right)$ □.

⊛ Nhận xét: Những hệ phương trình chứa hạng tử x^2,xy,y^2 phần lớn có thể đưa về phương trình bậc hai theo $ax+by$. Bài hệ trên còn có 2 cách giải khác, là dùng phép thế hoặc đặt ẩn phụ tổng - hiệu. Ta cùng xem qua một bài tương tự:

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2xy+2y^2+3x=0\ (1)\\ xy+y^2+3y+1=0\ (2)\end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng:
Như bài trên ta sẽ biến đổi để đưa về phương trình bậc hai theo $mx+ny$. Để làm điều đó ta nhân phương trình thứ nhất với α và phương trình thứ cho β rồi cộng lại:

$$(1).\alpha+(2).\beta \Leftrightarrow (x^2+2xy+2y^2+3x)+\beta(xy+y^2+3y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha\left[x^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)xy+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)y^2\right]+3\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}y\right)+\beta=0$$

Ta cần chọn α và β sao cho:

$$x^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)xy+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)y^2=\left(x+\frac{\beta}{\alpha}y\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)xy+\left(\frac{\beta}{\alpha}+2\right)y^2=x^2+2\frac{\beta}{\alpha}xy+\frac{\beta^2}{\alpha^2}y^2$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha}+2=\frac{2\beta}{\alpha}\\ \frac{\beta}{\alpha}+2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow \beta=2\alpha$$

Để cho đơn giản chọn $\alpha=1$ và $\beta=2$.
⊛ Lời giải:
Lấy phương trình thứ nhất cộng với phương trình thứ hai nhân (2) ta được:

$$x^2+4xy+4y^2+3x+6y+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow (x+2y+1)(x+2y+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2y+1=0\\ x+2y+2=0\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x+2y+1=0 \Rightarrow x=-2y-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}\\ y=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x+2y+2=0 \Rightarrow x=-2y-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-y^2+y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}\\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3-\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x,y) là $(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2})$; $(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $\left(-3+\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-3-\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Những hệ phương trình có chứa các phần tử x^2,xy,y^2 phần lớn có thể đưa về phương trình bậc hai theo $mx+ny$, từ đó có thể tính x theo y hoặc y theo x rồi thế ngược lai vào một trong hai phương trình của hệ sẽ ra được nghiệm.

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \ (1)\\ x^2y+x^2+2y-22=0 \ (2)\end{cases}$

Giải

⊛ ý tưởng: Hệ phương trình trên có bậc khá cao (bậc 4) nhưng có thể giảm bậc bằng cách đặt $t = x^2$. Vậy cách tự nhiên nhất chính là ta đưa về phương trình bậc 2. Để đảm bảo Δ chính phương ta sẽ dùng hệ số bất định như sau:
Ta có:

$$(1) + (2).a \Leftrightarrow x^4 + x^2(-4 + ay + a) + y^2 - 6y + 9 + 22ay - 22a = 0$$

Coi đây là phương trình bậc 2 theo x^2 ta có:

$$\Delta = y^2(a^2 - 4) + y(-16a + 2a^2 + 24) + a^2 + 80a - 20$$

Để Δ là một bình phương thì trước hết hệ số của y^2 phải là số chính phương, nghĩa là ta giải PT nghiệm nguyên $a^2 - 4 = k^2$

Tìm được các nghiệm của PT này, lần lượt thử lại. Dễ thấy $a = 2$ thì $\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ -16a + 2a^2 + 24 = 0 \\ a^2 + 80a - 20 = 144 \end{cases}$

Vậy ta chọn $a = 2$.
⊛ Lời giải:
Xét $(1) + (2).2$ ta có:

$$(1) + (2).2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 + 2(x^2y + x^2 + 2y - 22) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y + 5)(x^2 + y - 7) = 0$$

⋇ Nếu $y = -x^2 - 5$, thay vào (1) ta có phương trình

$$x^4 - 4x^2 + (x^2 + 5)^2 + 6(x^2 + 5) + 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 = -32(\text{vô nghiệm})$$

⋇ Nếu $y = -x^2 + 7$, thay vào (1) ta có phương trình

$$x^4 - 4x^2 + (x^2 - 7)^2 + 6(x^2 - 7) + 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 2; \pm\sqrt{2}\}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 3), (-2; 3), (-\sqrt{2}; 5), (\sqrt{2}; 5)$ □

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \ (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Do phương trình thứ nhât của hệ có bậc cao nhất nên ta sẽ để nguyên, nhân phương trình thứ hai cho α rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được :

$$x^3 + 3xy^2 + 49 + \alpha(x^2 - 8xy + y^2 + 17x - 8y) = 0 \ (1)$$

Mặt khác ta có thể nhẩm được nghiệm của hệ là $(x; y) = (-1, 4)$, do đó ta mong muốn (1) phân tích được thành:

$$(x + 1)(ax^2 + bx + cy^2 + dy + 49) = 0 \ \ (\text{dễ thấy hệ số của xy trong ngoặc bằng 0})$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cxy^2 + dxy + 49x + ax^2 + bx + cy^2 + dy + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (a+b)x^2 + cxy^2 + dxy + cy^2 + (b+49)x + dy + 49 = 0 \ (2)$$

Từ (1) và (2) đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = \alpha \\ c = 3 \\ d = -8\alpha \\ c = \alpha \\ b + 49 = 17\alpha \\ d = -8\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \alpha = 3 \\ b = 2 \\ d = -24 \end{cases}$$

⊛ Lời giải:
Nhân phương trình thứ hai của hệ cho 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất được :

$$x^3 + 3xy^2 + 49 + 3x^2 - 24xy + 3y^2 - 24y + 51x = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 24y + 49) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 + 3(y-4)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + 1 = 0, y - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1, y = 4 \end{array}\right.$$

⁎ Nếu $x = -1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ được $y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$
⁎ Nếu $x = -1, y = 4$ thay vào hệ thấy thỏa.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) là $(-1, 4), (-1, -4)$ □

Ta cùng xem qua một cách giải khác cho bài toán:
⊛ Ý tưởng: Để ý rằng hệ có bậc ba nhưng là bậc ba theo x, và chỉ có bậc hai theo y. Vậy ta sẽ lấy (1) cộng với (2).a và đưa về một phương trình bậc hai theo y:

$$y^2(3x + a) + y(-8ax - 8a) + x^3 + ax^2 + 17ax + 49 = 0$$

Ta cần chọn a để Δ là một bình phương của một biểu thức theo x. Cụ thể ta có:

$$\Delta = -3x^4 + x^3(-4a) + x^2(15a^2 - 51a) + x(15a^2 - 147a) + 16a^2 - 49a$$

Nếu Δ là bình phương thì nó sẽ phải có dạng $-3[f(x)]^2$. Muốn vậy trước hết $16a^2 - 49a$ phải là
(-3) lần của một số chính phương. Để đơn giản ta chọn $a \in \mathbb{Z}$ trước, nghĩa là cần phải giải phương trình nghiệm nguyên

$$16a^2 - 49a = -3b^2$$

Dễ thấy có $16a^2 - 49a \leqslant 0 \Leftrightarrow a(16a - 49) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in \{0; 1; 2; 3\}$
Lần lượt thử ta thấy $a = 3$ thì $\Delta = -3(x+1)^4$
Lại để ý rằng $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy ta có ngay nghiệm $x = -1$ (trường hợp tổng quát thì ta phải tính y theo x).
⊛ Lời giải: Xét $(1) + 3.(2)$ ta có phương trình

$$y^2(3x + 3) - 24y(x+1) + x^3 + 3x^2 + 51x + 49 = 0 \ (*)$$

(∗) có $\Delta = -3x^4 - 12x^3 - 18x^2 - 12x^3 - 3 = -3(x+1)^4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x = -1$ Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^3 + 3xy^2 = -49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

Do đó hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 4), (-1; -4)$ □

⊛ Nhận xét: Hai cách trên đều xét (1) + (2).a và đều ra $a = 3$ tuy ý tưởng khác nhau. Cách 1 rất hiệu quả trong những bài có thể tìm được nghiệm. Cách 2 mang tính tổng quát , và ý tưởng giải phương trình nghiệm nguyên khá thú vị. Bài này còn một cách giải khác bằng phương pháp đặt ẩn phụ tổng - hiệu.
Sau đây ta sẽ khai thác sâu về cách 1. Lưu ý rằng với những bài càng đoán được nhiều nghiệm thì càng dễ dùng hệ số bất định.

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2(3y+1)x^2 + (5y^2 + 4y + 11)x - y^2 + 10y + 2 = 0 \ (1) \\ y^3 + (x-2)y + x^2 + x + 2 = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Để giải bài trên ta sẽ tiến hành 4 bước:
Bước 1: tìm nghiệm của hệ. Nếu biết được nghiệm thì ý tưởng của ta sẽ rõ ràng hơn nhiều. Ở đây lần lượt thử $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ ta tìm được 2 nghiệm của hệ là $(x; y) = (-1; 1), (2; -2)$ □
Tuy nhiên lưu ý rằng bậc của hai phương trình là khá cao (4 và 3). Nếu phân tích như bài 5 thì ta vẫn phải giải quyết một hệ phương trình hai ẩn bậc 3 và 2 (sau khi đã giảm bậc). Vì vậy ở đây, do đã biết 2 nghiệm, ta sẽ tiến hành bước 2:
Bước 2: tìm quan hệ tuyến tính giữa 2 nghiệm này: Dễ thấy đó là $y = -x$.
Bước 3: thay vào hệ và phân tích thành nhân tử: Ta thay x bởi y hoặc y bởi x (tùy trường hợp xem cách nào có lợi), với bài này ta thay $y = -x$ vào hai phương trình của hệ và thu được

$$\begin{cases} x^4 + 2(-3x+1)x^2 + (5x^2 - 4x + 11)x - x^2 - 10x + 2 = 0 \\ -x^3 - (x-2)x + x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-1)(x-2) = 0 \\ (x+1)^2(x-2) = 0 \end{cases}$$

Việc phân tích trên là không khó vì ta đã biết trước nghiệm.
Bước 4: Lựa chọn biểu thức thích hợp:
Như thế, so với phương trình thứ nhất vừa nhận được thì phương trình thứ hai thiếu đi một biểu thức là $x - 1$, nhưng chú ý rằng biểu thức này cũng tương đương với $-y - 1$. Ta sẽ chọn một trong hai biểu thức này để nhân vào.
Rõ ràng nếu chọn $-y - 1$ thì việc nhân sẽ tạo ra một đa thức có chứa biến y đồng bậc với đa thức ở phương trình thứ nhất ban đầu. Vậy ta sẽ nhân phương trình sau cho $-y - 1$.
⊛ Lời giải:
Nhân phương trình thứ hai cho $y + 1$, rồi lấy phương trình thứ nhất, trừ phương trình vừa nhận được, ta có:

$$(x+y)(x-y+2)(x^2 - 2x + y^2 + 3y + 5) = 0]$$

- Với $x = -y$, ta đưa phương trình thứ hai của hệ về $(y+2)(y-1)^2 = 0$
- Với $x = y - 2$, ta đưa phương trình thứ hai của hệ về $(y-1)^2(y+4) = 0$

Dễ thấy không xảy ra $x^2 - 2x + y^2 + 3y + 5 = 0$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x, y) = (-1, 1), (2, -2), (-6, -4)$ □

⊛ Nhận xét: Vận dụng linh hoạt 4 bước trên có thể cho ta lời giải rất đẹp và ngắn gọn. Ta cùng xem qua một bài tương tự:

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2 + x + y = y^2 \ (1) \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 = -y^2 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đầu tiên ta thấy (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2xy + x + y = 0$.

Có thể tìm được 3 nghiệm nguyên của hệ này là $(x; y) = (0, 0), (2; 2), (1; 2)$. Từ 2 nghiệm đầu ta thấy $x = y$. Thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ [x(x-2)]^2 = 0 \end{cases}$

Như vậy ta sẽ phải nhân $x(x-2)$ hoặc $y(y-2)$ vào (1). Để ý rằng nếu chọn $x(x-2)$ ta sẽ làm mất bậc 4. Vậy khâu chuẩn bị đã hoàn tất.

⊛ Lời giải:

Xét $x = 0$ và $x = 2$ ta thấy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (2; 2)$.

Với $x \notin \{0; 2\}$ xét $(1).[x(x-2)] + (2)$ ta có phương trình

$$x(x-2)(x^2 - 2xy + x + y) + (x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x^3 - x^2 + x - y) = 0$$

⋇ Nếu $x = y$ thay vào (1) ta có $2x - x^2 = 0$. Trường hợp này loại do $x \notin \{0; 2\}$

⋇ Nếu $2x^3 - x^2 + x - y = 0$ ta có hệ phương trình

$$(*) \begin{cases} 2x^3 - x^2 + x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + x + y = 0 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình ta có

$$2x^3 - 2xy + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2y \text{ (do } x \neq 0)$$

Thay vào (1) ta có phương trình

$$-2x^3 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Từ đó tìm được $(x; y) = (1; 2)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2), (0; 0), (2; 2)$ □

MỞ RỘNG:

⊛ Ý tưởng: Như đã đề cập, nếu biết càng nhiều nghiệm thì ta có lời giải càng đẹp. Sau đây là một cách phân tích khi ta biết cả 3 nghiệm. Ta sẽ lần lượt lập 3 quan hệ tuyến tính giữa x và

y. Trong bài này, đó là $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 2 \end{cases}$

Do (2) có bậc cao hơn nên ta xét

$$(1).\alpha + (2) \Leftrightarrow x^4 + x^2(-4y + \alpha + 3) + x(\alpha - 2\alpha y) + \alpha y + y^2 = 0 \ (3)$$

Ta sẽ chọn quan hệ nào dễ sử dụng nhất, đó chính là $y = 2$. Như vậy (3) có nghiệm $y = 2$, nghĩa là

$$x^4 + x^2(\alpha - 5) + x(-3\alpha) + 2\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-x^4 + 5x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = -(x+1)(x+2)$$

Khi đó (3) trở thành $2x^3 + x^2 + x + y = 0$

Ta tiếp tục khai thác một trong hai quan hệ còn lại, để ý rằng như đã phân tích ở trên, với $\alpha = x(x-2)$ ta thu được $2x^3 - x^2 + x - y = 0$

Vậy ta đi đến lời giải ngắn gọn như sau:

⊛ Lời giải:

Thử với $x \in M = \{0; 2; -1; -2\}$ ta tìm được nghiệm $(x; y) = (0; 0), (2; 2), (1; 2)$. Xét $x \notin M$ ta có

$$(1).\alpha + (2) \Leftrightarrow y^2 + y(\alpha - 2\alpha x - 4x^2) + \alpha x + x^2(\alpha + 3) + x^4 = 0 \ (**)$$

Chọn $\alpha = x(x-2)$ ta có $2x^3 - x^2 + x - y = 0$

Chọn $\alpha = -(x+1)(x+2)$ ta có $2x^3 + x^2 + x + y = 0$

Cộng lại ta có $4x^3 + 2x = 0$ (sai do $x \notin M$). Vậy trường hợp này loại.

Tóm lại hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (2; 2), (1; 2)$ □

Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \ (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \ (2) \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + 2x - 5y + 3 = 0(1) \\ x^2 + 2y = 1(2) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 21x + 3y + 96x^2 + 28xy = 117 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 1215 \\ 2x^3 - 4y^3 = 9(x^2 - 4y^2) - 18(x - 8y) \end{cases}$

KĨ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ TỔNG - HIỆU

Lý thuyết

Trong việc giải hệ phương trình thì đặt ẩn phụ là cách hiệu quả và rất đa dạng. Phương pháp đặt ẩn phụ tổng - hiệu là một cách đặt dễ nhận biết, tuy không phải tối ưu nhưng cũng có thể đưa về một hệ phương trình giải bằng phương pháp thế.

Nội dung phương pháp chính là, từ một hệ phương trình theo 2 ẩn x, y ta đặt

$$(*)\begin{cases} a = mx + ny \\ b = ux + vy \end{cases} \quad \text{hoặc } (**)\begin{cases} x = ma + nb \\ y = ua + vb \end{cases} \quad \text{(a, b là ẩn mới)} .$$

Hai phép đặt trên thực ra tương đương, vì ta có thể tính x, y theo a, b và ngược lại. Lưu ý rằng:

★ Phép đặt $(*)$ được dùng với những hệ mà ta có thể nhóm các hạng tử một cách thích hợp để tạo ra phương trình đơn giản hơn theo $mx + ny$ và $ux + vy$.

★ Phép đặt $(**)$ được dùng với những hệ phương trình mà ta hi vọng có thể khử một hay một số hạng tử nào đó sau khi khai triển. (lưu ý rằng hệ phương trình hữu tỉ mà 2 ẩn tách biệt thì có thể giải quyết bằng hệ số bất định).

Khi gặp một bài toán ta nên thử $(*)$ trước, vì phép đặt này cho hệ đơn giản hơn.

Một trường hợp đặc biệt hơn là phép đặt $\begin{cases} a = mx + ny \\ b = nx - my \end{cases}$ dùng cho hệ phương trình có một phương trình đối xứng, có thể đưa một số bài về hệ đối xứng loại I.

Phương pháp này có thể giải quyết nhiều hệ phương trình hữu tỉ, đặc biệt là hệ bậc hai. Vì từ một phương trình bậc hai 2 ẩn $m_1x^2 + m_2xy + m_3y^2 + m_4x + m_5y + m_6 = 0$ ta có thể đưa về dạng $n_1ab + n_2a + n_2b + n_3 = 0$, từ đó tính được a theo b.

Sau đây là các ví dụ cụ thể:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Dễ thấy nếu đặt $a = x + y, b = x - y$ thì từ phương trình sau có $ab = 3$ nên mục tiêu dùng phép thế đã thành công. Việc còn lại là đưa phương trình đầu về biến a, b (dễ thấy $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}[3(x + y)^2 + (x - y)^2]$)

⊛ Lời giải:

Đặt $a = x + y; b = x - y$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 4b \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{b} \\ \dfrac{27}{b^2} + b^2 = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $(x; y) = (2; 1)$ □

Bài 2: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - 4y^2 + \dfrac{2xy}{x + y - 1} = -1 \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x + y \neq 1$

Phương trình (2) tương đương:

$$\begin{aligned}
&(x+y-1)\left(x^2-4y^2\right)+x+y+2xy+1=0\\
&\Leftrightarrow \left(x^3-4y^3-4xy^2+x^2y\right)-x^2+4y^2+x+y+2xy-1=0\\
&\Leftrightarrow (x+2y)\left(x^2-xy-2y^2\right)+\left(xy+x+2y^2+2y\right)-\left(x^2-xy-2y^2+y+1\right)=0\\
&\Leftrightarrow (x+2y)\left(x^2-xy-2y^2\right)+(x+2y)(y+1)-\left(x^2-xy-2y^2+y+1\right)=0\\
&\Leftrightarrow (x+2y-1)\left(x^2-xy-2y^2+y+1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=1\\ x^2-xy-2y^2+y+1=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

⋇ Nếu $x + 2y = 1$ thay vào phương trình (1) ta được

$$\begin{cases} x=1-2y\\ 5y^2-6y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y\\ \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3+\sqrt{14}}{5}\\ y=\dfrac{3-\sqrt{14}}{5}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3+\sqrt{14}}{5}; x=\dfrac{-1-2\sqrt{14}}{5}\\ y=\dfrac{3-\sqrt{14}}{5}; x=\dfrac{-1+2\sqrt{14}}{5}\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x^2 - xy - 2y^2 + y + 1 = 0$ ta có hệ phương trình:

$$(*)\begin{cases} x^2+y^2+x=3\\ x^2-xy-2y^2+y+1=0\end{cases}$$

Như vậy mấu chốt của bài toán lại là hệ phương trình $(*)$

⊛ Ý tưởng: Để sử dụng phép thế, ta phải đưa một phương trình về dạng $p.ab + q.a + r.b = m$ (ẩn a, b). Như vậy các hạng tử bậc 2 trong phương trình phải được đưa về tích của a và b (để ý a, b là bậc nhất). Nghĩa là ta phải phân tích $x^2 - xy - 2y^2$ thành nhân tử.

Dễ thấy $x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y)$, vậy ta đặt $\begin{cases} a=x+y\\ b=x-2y\end{cases}$

⊛ Lời giải:

Đặt $a = x + y; b = x - 2y \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a+b}{3}\\ y=\dfrac{a-b}{3}\end{cases}$

Ta có HPT:

$$\begin{cases} (2a+b)^2+(a-b)^2+3(2a+b)=27 \ (1)\\ 3ab+a-b+3=0 \ (2)\end{cases}$$

Từ (2) có $a = \dfrac{b-3}{3b+1}$. Thế vào (1) được phương trình bậc 4 theo b:

$$54b^4+135b^3-648b^2-729b=0 \Leftrightarrow b \in \left\{\frac{-9}{2}; -1; 0; 3\right\}$$

Như vậy hệ tương đương

$$\left[\begin{array}{l} b=\frac{-9}{2}; a=\frac{3}{5} \\ b=-1; a=2 \\ b=0; a=-3 \\ b=3; a=0 \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được nghiệm

$(x;y)=\left(\frac{-11}{10};\frac{17}{10}\right),(1;1),(-2;-1),(1;-1),\left(\frac{-1-2\sqrt{14}}{5};\frac{3+\sqrt{14}}{5}\right),\left(\frac{-1+2\sqrt{14}}{5};\frac{3-\sqrt{14}}{5}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Như vậy từ một hệ không thể dùng phép thế, qua phép đặt ẩn phụ đã đưa về hệ giải bằng phép thế. Dù phương trình bậc 4 có hệ số cao nhưng ý tưởng giải là rõ ràng.

Hệ $(*)$ cũng có thể giải bằng hệ số bất định. Cụ thể, lấy phương trình đầu nhân với 2 và cộng với phương trình sau ta thu được

$$3x^2-x(y-2)+y-5=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-y+5)=0$$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{2}{5} \ (1) \\ 4x^2+3x-\frac{57}{25}=-y(3x+1) \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Xét các hạng tử bậc 2 ở cả hai phương trình, ta thấy không thể phân tích thành nhân tử. Tuy nhiên lưu ý rằng ta có thể thay đổi hệ số của x^2 và y^2 ở (2) bằng phép thế (1). Như vậy ta hướng tới cách đặt $(*)$, nhưng ở đây khó khăn hơn vì ta không biết biểu thức cần phân tích là gì. Tiếp tục khai thác bài toán:

► Ta sẽ thế (1) vào (2) để biến đổi biểu thức bậc 2. Nghĩa là ta xét:

$$(1).\alpha+(2) \Leftrightarrow x^2(4+\alpha)+3xy+\alpha y^2+3x+y=\frac{57}{25}+\frac{\alpha}{5}$$

Mục đích của ta là phân tích $f(x)=x^2(4+\alpha)+3xy+\alpha y^2$ thành nhân tử. Muốn vậy thì Δ của $f(x)$ phải là một bình phương. Ta xét

$$\Delta=9y^2-4\alpha(4+\alpha)y^2=y^2(9-16\alpha-4\alpha^2)$$

Như vậy ta phải tìm α để $9-16\alpha-4\alpha^2$ là số chính phương, nói cách khác là giải phương trình nghiệm nguyên

$$9-16\alpha-4\alpha^2=k^2$$

Từ đó tìm được $\alpha \in \{-4;-2;0\}$ (thật ra chỉ cần tìm nghiệm nguyên của $9-16\alpha-4\alpha^2 \geqslant 0$ rồi thử lại). Dễ thấy chỉ nhận $\alpha=-2$. Khi đó ta có phân tích $2x^2+3xy-2y^2=(2x-y)(x+2y)$. Vậy đặt $a=2x-y; b=x+2y$.

⊛ Lời giải:

Lấy $(2)-2.(1)$ ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{2}{5} \\ 2x^2+3xy-2y^2+3x+y=\frac{47}{25} \end{cases}$$

Đặt $a = x + 2y$, $b = 2x - y$ ta có hệ đối xứng :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a + b + ab - \dfrac{47}{25} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{5}; b = \dfrac{4}{5} \\ a = \dfrac{4}{5}; b = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy ta tìm được $(x; y) = \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}); (\dfrac{11}{25}; \dfrac{2}{25}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Bài toán trên cũng có thể giải bằng hệ số bất định. Cụ thể ta xét

$$(1).25 + (2).50 \Leftrightarrow 25(3x + y)^2 + 50(3x + y) - 119 = 0 \Leftrightarrow 3x + y \in \left\{\frac{7}{5}; \frac{-17}{5}\right\}$$

Từ đó dễ dàng làm tiếp.

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Thử xét hạng tử bậc 2 trước, ta thấy không thể phân tích $x^2-8xy+y^2$ thành nhân tử và cũng không có cách nào biến đổi biểu thức này. Đến hạng tử bậc 3, dù $x^3+3xy^2 = x(x^2+3y^2)$ nhưng không dễ đưa về bậc 3 theo a, b với phép đặt $(*)$. Vậy ta chuyển qua phép đặt $(**)$. Trước tiên ta thử cách đặt $x = ua+vb; y = va-ub$ và mục đích của ta chính là khử ab, a^2b, ab^2 sau khi đưa về hệ bậc 3 theo a, b.

Giờ ta sẽ tìm u, v:

Đặt $\begin{cases} x = ua + vb \\ y = va - ub \end{cases}$ thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} a^3(u^3 + 3uv^2) + b^3(v^3 + 3u^2v) + a^2b(3v^3 - 3u^2v) + ab^2(3u^3 - 3uv^2) = -49 \\ a^2(u^2 - 8uv + v^2) + b^2(v^2 + 8uv + u^2) + 8ab(u^2 - v^2) = -9ua - 25vb \end{cases}$$

Ta sẽ đồng nhất hệ số sao cho hệ số của a^2b, ab^2 và ab bằng 0 :

$$\begin{cases} 3v^3 - 3u^2v = 0 \\ 3u^3 - 3uv^2 = 0 \\ u^2 - v^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = -v \end{array}\right.$$

Do $u = v$ hay $u = -v$ đều có cùng cách đặt nên ta chọn $u = v = 1$ (thật ra có thể lấy u, v tuỳ ý, vì vế trái của phương trình đầu là thuần nhất).

⊛ Lời giải:

Đặt $x = a + b$, $y = a - b$ ta có hệ:

$$\begin{cases} 4a^3 + 4b^3 = -49 \\ -6a^2 + 10b^2 = -9a - 25b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a^3 + 8b^3 = -98 \\ 6a^2 - 9a = 10b^2 + 25b \end{cases}$$

Tới đây có thể giải tiếp bằng hệ số bất định. Cụ thể, lấy phương trình thứ nhất cộng phương trình thứ hai nhân (-6) ta có

$$(2a - 3)^3 = (-2b - 5)^3 \Leftrightarrow 2a - 3 = -2b - 5 \Leftrightarrow a = -b - 1$$

Từ đó tìm được $(a;b) = \left(\frac{-5}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};\frac{-5}{2}\right)$

Như vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (-1;4), (-1;-4)$ □

⊛ Nhận xét: Từ bài trên có thể rút ra một kinh nghiệm nhỏ là nếu trong một phương trình có mx^3 và $3mxy^2$, hoặc my^3 và $3mx^2y$ thì ta có thể đặt $x = a+b; y = a-b$.Sau đây ta xét một bài tương tự:

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \ (1) \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Theo nhận xét bài 4, do phương trình đầu có $2y^3+6x^2y$ nên ta đặt $x = a+b; y = a-b$.

⊛ Lời giải:

Đặt $x = a+b; y = a-b$ ta có (1) trở thành:

$$6(a+b)^2(a-b) + 2(a-b)^3 + 35 = 0 \Leftrightarrow 6\left(a^2+2ab+b^2\right)(a-b) + 2\left(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\right) + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(a^3-a^2b+2a^2b-2ab^2+ab^2-b^3\right) + 2a^3-6a^2b+6ab^2-2b^3+35 = 0 \Leftrightarrow a^3-b^3+\frac{35}{8} = 0$$

Tương tự, (2) trở thành: $6a^2+9a+4b^2-4b = 0$

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3-b^3 = -\dfrac{35}{8} \\ 6a^2+9a+4b^2-4b = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này bằng hệ số bất định, ta tìm được $(a;b) = \left(-1;\frac{3}{2}\right);\left(\frac{-3}{2};1\right)$

Vậy ta có $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{-5}{2}\right);\left(\frac{-1}{2};\frac{-5}{2}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Nếu đã biết nghiệm của hệ, ta cũng có thể trình bày ngắn gọn hơn bằng hệ số bất định như sau:

$$(1)+3.(2) \Leftrightarrow (6y+15)x^2+3(2y+5)x+2y^3+15y^2+39y+35 = 0 \Leftrightarrow (2y+5)\left[3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right] = 0$$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-2x = y^4-y \\ \left(x^2-y^2\right)^3 = 3 \end{cases}$

(Đề kiểm tra đội dự tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Giải

Đặt $x+y = a, x-y = b, 3 = c^3$.

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có: $(ab)^3 = c^3 \Leftrightarrow ab = c$.

Ta có: $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$. Suy ra:

$$x^4-y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = ab\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] = \frac{ab}{2}(a^2+b^2)$$

Lại có nữa:

$$2x - y = (a+b) - \frac{(a-b)}{2} = \frac{a+3b}{2} = \frac{a+c^3b}{2}$$

Do đó, phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với:

$$\frac{ab}{2}(a^2+b^2) = \frac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2+b^2) = a + c^3b$$

Ta có hệ mới là:

$$\begin{cases} c(a^2+b^2) = a+c^3b \\ ab = c \end{cases} \Rightarrow c\left(a^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow ca^4 + c^3 = a^3 + ac^4$$

$$\Leftrightarrow (ca-1)(a^3-c^3) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{c} \vee a = c$$

Suy ra hệ này có hai nghiệm là: $(a,b) = (c,1); \left(\frac{1}{c}, c^2\right)$.

Xét hai trường hợp:

※ Nếu $a = c, b = 1$ thì $x = \frac{c+1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

※ Nếu $a = \frac{1}{c}, b = c^2$ thì $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + c^2\right) = \frac{1+c^3}{2c} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - c^2\right) = \frac{1-c^3}{2c} = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: $(x,y) = \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right), \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ □.

Bài tập tự luyện

Giải hệ phương trình:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = y \\ x^2 + xy + x = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4(x^2+y^2) + 4xy + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(x^2+y^2) + \dfrac{1}{(x-y)^2} = 2(10-xy) \\ 2x + \dfrac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6} = y+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4x + 6y - 1 \\ x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 = 2x^2y^2 - 10xy - 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 21x + 3y + 48x^2 - 48y^2 + 28xy = 69 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Về ý tưởng, dùng bất đẳng thức trong phương trình và hệ phương trình là tương tự. Nhưng trong nhiều bài hệ, việc đánh giá các ẩn sẽ phức tạp hơn nhiều. Ta cùng xem qua một số bài tập:

Bài tập ví dụ

Bài 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^6+y^8+z^{10}=1\ (1) \\ x^{2007}+y^{2009}+z^{2011}=1\ (2) \end{cases}$

Giải

Từ (1) ta có: $-1 \leqslant x, y, z \leqslant 1$
Từ (1) và (2) ta có:

$$x^{2007}+y^{2009}+z^{2011}=x^6+y^8+z^{10}$$
$$\Leftrightarrow x^6\left(1-x^{2001}\right)+y^8\left(1-y^{2001}\right)+z^{10}\left(1-z^{2001}\right)=0\,(3)$$

Từ $-1 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ ta thấy:

$$x^6\left(1-x^{2001}\right), y^8\left(1-y^{2001}\right), z^{10}\left(1-z^{2001}\right) \geqslant 0$$

Do đó:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z=1 \\ x=y=z=0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với (1)suy ra hệ có các nghiệm là: $(x; y; z)=(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$ □

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(a+b)=2\left|ab+1\right| \\ 9(a^3+b^3)=\left|a^3b^3+1\right| \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$\left|a^3b^3+1\right|=\left|(ab+1)(a^2b^2-ab+1)\right|=\left|(ab+1)\right|\left|(a^2b^2-ab+1)\right|=\left|(ab+1)\right|\left|(ab+1)^2-3ab\right|$$

$$\Rightarrow \left|(ab+1)\right|\left|(ab+1)^2-3ab\right|=\frac{3}{2}(a+b)\left[\frac{9}{4}(a+b)^2-3ab\right]=\frac{9}{8}(a+b)(3a^2+2ab+3b^2)$$

Lại có: $5(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 9(a^3+b^3) \geqslant \frac{9}{8}(a+b)(3a^2+2ab+3b^2) \Rightarrow 9(a^3+b^3) \geqslant \left|a^3b^3+1\right|$
Đẳng thức xảy ra nên $a=b$.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất $a=b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ □.

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} a+b=\sqrt[3]{24} \\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\right)=2 \end{cases}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a+b}{a+3b}\right) \\ \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2b}{a+3b}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{3}{2}\right)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{3}{2}\right)$

Cộng lai ta được

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\right) \leqslant 2$$

Đẳng thức xảy ra nên $a = b$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $a = b = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}$ □.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x = y^2 \end{cases}$

Giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ (x-1)(x^2 - x + 1) = y^2 - 1 \end{cases}$$

Xét các khả năng sau:

⋇ Nếu $x > 1 \Rightarrow (x-1)(x^2-x+1) > 0 \Rightarrow y^2 > 1 \Rightarrow y^4 > 1 \Rightarrow x^4 + y^4 > 2$

Khi ấy hệ đã cho vô nghệm.

⋇ Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y^4 < 1$

Trong trường hợp này hệ cũng vô nghiệm.

⋇ Nếu $x < 0$ thì $x^3 - 2x^2 + 2x < 0 \Rightarrow y^2 < 0$: vô lý.

⋇ Tại $x = 0$, ta có hệ $\begin{cases} y^4 = 2 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

⋇ Tại $x = 1$, hệ trở thành: $\begin{cases} y^4 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1), (1; -1)$ □

Bài 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $0 \leqslant x \leqslant 32$.

Cộng hai phương trình vế theo vế:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) = y^2 - 6y + 21 \; (1)$$

Lại có:

$$\begin{cases} y^2-6y+21=(y-3)^2+12\geqslant 12 \ (2) \\ \sqrt{x}+\sqrt{32-x}\leqslant \sqrt{2(x+32-x)}=8 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\leqslant \sqrt{2(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})}\leqslant \sqrt{2.8}=4 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})\leqslant 12 \quad (3)$

Kết hợp (1),(2) và (3) ta có $(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})=y^2-6y+21=12 \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=16, y=3$ □.

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \ (1) \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \ (2) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đây là hệ phương trình đối xứng loại II, nhưng nếu làm theo cách thông thường thì sẽ rất khó khăn do có sự xuất hiện của căn bậc ba. Để ý rằng khi ta cộng 2 phương trình lại hạng tử $(x+y)$ ở mỗi vế sẽ được đơn giản, khi đó VT xuất hiện $2xy$, còn VP xuất hiện x^2+y^2, và do đây là hệ phương trình đối xứng loại II nên sẽ có nghiệm $x=y$. Từ đó ta nghĩ tới việc đánh giá $2xy$ và x^2+y^2.

⊛ Lời giải:
Với $x=0 \Leftrightarrow y=0$. Xét $x,y\neq 0$:
Cộng (1) và (2) vế theo vế:

$$x+y+2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2+x+y$$

$$\Leftrightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2 \ (3)$$

Suy ra $2xy>0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\leqslant 1 \Rightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)\leqslant 2xy\leqslant x^2+y^2 \ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $x=y=1$. Thử lại các nghiệm $(0;0),(1;1)$đều thỏa.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là (0;0), $(1;1)$. □

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^4(1-2x^2)=y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3(x^3-x+2y^2) \end{cases}$

Giải

⊛ Nhận thấy các biểu thức trong căn rất phức tạp. Nhưng phương trình sau đã gợi ý cho ta đưa về các bình phương, từ đó hi vọng có thể đánh giá bất đẳng thức một cách hợp lí.
⊛ Lời giải:
Nhận thấy $\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2} = \sqrt{4-(1-x^2y)^2} \leqslant 2$ và $1+\sqrt{1+(x-y)^2} \geqslant 2$

$$\Rightarrow y^4+2x^6-x^4 \leqslant x^6-x^4+2x^3y^2 \Leftrightarrow (x^3-y^2)^2 \leqslant 0$$

Suy ra $x^3 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2y=0 \\ x-y=0 \\ x^3=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$
Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$ □

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3-x^3=7 \\ x^3-y^2+x=-2 \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} y^3-8=x^3-1 \\ (y^3-7)-y^2+x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-8=x^3-1 \\ y^3-y^2-4=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-8=x^3-1 \ (1) \\ (y-2)(y^2+y+2)=1-x \ (2) \end{cases}$$

Ta có $y^2+y+2=(y+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0, \forall y \in R.$
Xét các trường hợp:
⁎$y>2$: Ta có $\begin{cases} (1) \Rightarrow x>1 \\ (2) \Rightarrow x<1 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm
⁎$y<2$: Ta có $\begin{cases} (1) \Rightarrow x<1 \\ (2) \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm
⁎$y=2 :\Rightarrow x=1$
Vậy hệ phương trình có nghiệm (1;2) □.
⊛ Nhận xét: Mấu chốt của lời giải trên chính là đoán được nghiệm $(x;y)=(1;2)$, từ đó có những biến đổi đẳng thức hợp lí để chứng minh đây là nghiệm duy nhất. Ta cùng xem qua một bài tương tự:

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y=-x^3+3x+4 \\ x=2y^3-6y-2 \end{cases} (*)$

Giải

⊛ Ý tưởng: dễ dàng nhẩm được nghiệm của hệ phương trình là $x=y=2$.
Ta hi vọng đây là nghiệm duy nhất của hệ, vì thế ta sẽ cố gắng đưa hệ phương trình ban đầu về dạng: $\begin{cases} y-2=(x-2).f(x) \\ x-2=(y-2).g(y) \end{cases}$
Rồi từ hai phương trình trên dựa vào dấu của $f(x)$ và $g(y)$ ta sẽ đánh giá giữa x và y, và để

làm được điều này ta sẽ chia trường hợp để xét.
⊛ Lời giải:
Viết lại hệ dưới dạng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 2 - y \\ 2y^3 - 6y - 4 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)^2 = 2 - y \ (1) \\ 2(y-2)(y+1)^2 = x - 2 \ (2) \end{cases}$$

⁎ Nếu $x > 2$: $\begin{cases} (1) \Rightarrow y < 2 \\ (2) \Rightarrow y > 2 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm

⁎ Nếu $x < 2$: $\begin{cases} (1) \Rightarrow y > 2 \\ (2) \Rightarrow y < 2 \end{cases} \Rightarrow$ Vô nghiệm

Suy ra $x = 2 \Rightarrow y = 2$.
Thử lại ta thấy $x = y = 2$ thỏa hệ.
Vậy hệ phương trình có nghiệm (2;2) □.

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 + y^5 + z^5 = 3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 3 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: từ hai phương trình trên ta suy ra $x^6 + y^6 + z^6 = x^5 + y^5 + z^5$.
Ta nghĩ tới việc đánh giá giữa $x^6 + y^6 + z^6$ và $x^5 + y^5 + z^5$, cụ thể là ta sẽ đi chứng minh $x^6 + y^6 + z^6 \geqslant x^5 + y^5 + z^5$.
Dĩ nhiên để chứng minh được bất đẳng thức này ta phải nghĩ tới việc sử dụng công cụ mạnh là bất đẳng thức Holder.
⊛ Lời giải:
Từ giả thiết ta suy ra $x^6 + y^6 + z^6 = x^5 + y^5 + z^5$
Ap dụng bất đẳng thức Holder cho 6 bộ ba số dương có :

$$(x^6 + y^6 + z^6)^5.(1+1+1) \geqslant (|x|^5 + |y|^5 + |z|^5)^6 \geqslant (x^5 + y^5 + z^5)^6$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 = y^6 = z^6 \\ x, y, z \geqslant 0 \end{cases}$

Kết hợp với giả thiết suy ra $x = y = z = 1$.
Thử lại ta thấy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(1; 1; 1)$ □

Bài 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \ (1) \\ 7x^2 - 14x + 3y^3 + 10 = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

Từ (1) suy ra:

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow y^3 \geqslant -1 \ (*)$$

Từ (2) suy ra $7(x-1)^2+3(y^3+1)=0$

Mà $7(x-1)^2 \geqslant 0;\ 3(y^3+1) \geqslant 0$ (do (*)) $\Rightarrow 7(x-1)^2+3(y^3+1) \geqslant 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \\ y^3+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;-1)$ □

Bài 12: Giải hệ phương trình (*) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy-xz-yz=3 \\ x^2+y^2+yz-zx-2xy=-1 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy rằng ở phương trình thứ nhất có thể phân tích thành một bình phương của một tổng theo x,y,z và còn dư một lượng theo z^2, phương trình thứ hai cũng có thể phân tích thành bình phương của một tổng có chứa x,y,z nhưng lại thiếu một lượng theo z^2.
Từ đó ta nghĩ tới việc đánh giá z^2 từ mỗi phương trình.

⊛ Lời giải:

Viết lại hệ (*) dưới dạng

$$\begin{cases} (x^2+y^2+2xy)-z(x+y)+z^2=3 \\ (x^2+y^2-2xy)-z(x-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-z(x+y)+\dfrac{z^2}{4}+\dfrac{3z^2}{4}=3 \\ (x-y)^2-z(x-y)+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-\dfrac{z}{2})^2=3(1-\dfrac{z^2}{4}) \\ (x-y-\dfrac{z}{2})^2=\dfrac{z^2}{4}-1 \end{cases} (**) \Rightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{z^2}{4} \geqslant 0 \\ \dfrac{z^2}{4}-1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 \leqslant 4 \\ z^2 \geqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow z^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

⋇ $z=2, (**) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)^2=0 \\ (x-y-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

⋇ $z=-2, (**) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y+1)^2=0 \\ (x-y+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y;z)=(1;0;2),(-1;0;2)$ □.

Bài 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^x+4^y=32 \\ xy=8 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Ta thấy phương trình thứ nhất của hệ có dạng tổng, phương trình thứ hai có dạng tích nên nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá.

⊛ Lời giải:

Do $xy=8>0 \Rightarrow x,y$ cùng dấu

Nếu $x < 0, y < 0 \Rightarrow VT < 2 < VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
Nếu $x > 0, y > 0$:
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$$2^x + 4^y = 2^x + 2^{2y} \geqslant 2\sqrt{2^x 2^{2y}} = 2\sqrt{2^{x+2y}} \geqslant 2\sqrt{2^{2\sqrt{2xy}}} = 2\sqrt{2^{2\sqrt{2.8}}} = 32$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{2y} \\ x = 2y \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$
Thử lại ta thấy nghiệm (4;2) thỏa hệ.
Vậy hệ phương trình có nghiệm (4;2) $\square$

Bài 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$

(Thi vô địch toán Bungari 1977)

Giải

Ta thấy $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ.
Nếu $\left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{array}\right.$ thì $x, y, z > 0$. Khi đó, nhân 3 vế của hệ phương trình ta có

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(z^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} = xyz \Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = 8xyz$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM có:

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geqslant 2\sqrt{x^2}.2\sqrt{y^2}.2\sqrt{z^2} = 8\,|xyz| = 8xyz \text{ (do } xyz > 0)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 = y^2 = z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$
Thử lại ta thấy $x = y = z = 1$ thỏa hệ.
Vậy hệ phương trình có nghiệm (0;0;0), (1;1;1) $\square$.
⊛ Nhận xét:
1) Bài hệ trên cũng có thể giải bằng hàm đơn điệu. Cụ thể xét hàm $f(t) = \dfrac{2t^2}{t^2+1}$, ta có $f'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Dễ thấy $x, y, z \geqslant 0$ do đó không giảm tổng quát giả sử $x = \max\{x; y; z\}$ thì
$f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow y \geqslant z \Rightarrow f(y) \geqslant f(z) \Rightarrow z \geqslant x \Rightarrow x = y = z$.
Ta cùng xem qua bài toán tổng quát hơn:

Bài 15: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \dfrac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x \end{cases}$

Giải

Rõ ràng nếu một trong số các ẩn x, y, z bằng 0 thì các $x = y = z = 0$.
Như vậy $x = y = z = 0$ là nghiệm của hệ đã cho.
Nếu $x, y, z \neq 0 \Rightarrow x, y, z > 0$
Ta có:

$$x^2 + 1 \geqslant 2x \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leqslant 1 \Rightarrow y = \frac{2x^2}{x^2+1} \leqslant x \ (1)$$

$$y^4 + y^2 + 1 \geqslant 3y \Rightarrow \frac{3y^2}{y^4+y^2+1} \leqslant 1 \Rightarrow z = \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} \leqslant y \ (2)$$

$$z^6 + z^4 + z^2 + 1 \geqslant 4z^3 \Rightarrow \frac{4z^3}{z^6+z^4+z^2+1} \leqslant 1 \Rightarrow x = \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} \leqslant z \ (3)$$

Từ (1),(2),(3) ta suy ra $x = y = z = 1$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = 0$ hoặc $x = y = z = 1$ $\square$.

Bài 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

Giải

Giả sử hệ phương trình có nghiệm (x, y) Viết lại phương trình thứ hai theo x:

$$x^2 + x(y-3) + (y-2)^2 = 0$$

Để phương trình có nghiệm x thì

$$\Delta_x = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3} \ (1)$$

Viết lại phương trình thứ hai theo y:

$$y^2 + y(x-4) + x^2 - 3x + 4 = 0$$

Để phương trình có nghiệm y thì:

$$\Delta_y = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3} \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^4 + y^2 \leqslant \left(\dfrac{4}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{697}{81} < 9$ (mâu thuẫn)
Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm $\square$

Bài 17: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{2010} \\ \dfrac{1}{3x+2y} + \dfrac{1}{3y+2z} + \dfrac{1}{3z+2x} = \dfrac{1}{x+2y+2z} + \dfrac{1}{y+2z+2x} + \dfrac{1}{z+2x+2y} \end{cases}$$

Giải

⊛ Ý tưởng: Do số ẩn và phương trình không bằng nhau nên ta sẽ dùng bất đẳng thức. Khó có thể so sánh $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ với $\sqrt{2010}$, nên ta sẽ khai thác phương trình sau.
⊛ Lời giải:
ĐKXĐ: x, y, z không âm và không đồng thời bằng 0.
Theo BĐT Cauchy-Shwarz ta có:

$$\frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{x+2y+2z}=\frac{2(2x+2y+z)}{(3x+2y)(x+2y+2z)}\geqslant\frac{2(2x+2y+z)}{(2x+2y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{x+2y+2z}\geqslant\frac{2}{2x+2y+z}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3y+2x}+\dfrac{1}{y+2x+2z}\geqslant\dfrac{2}{x+2y+2z}\\\dfrac{1}{3z+2x}+\dfrac{1}{z+2x+2y}\geqslant\dfrac{2}{y+2x+2z}\end{cases}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{3y+2x}+\frac{1}{3z+2x}\geqslant\frac{1}{2x+2y+z}+\frac{1}{x+2y+2z}+\frac{1}{y+2x+2z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.
Thay vào hệ ta có: $3\sqrt{x}=\sqrt{2010}\Leftrightarrow x=\dfrac{670}{3}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(\dfrac{670}{3},\dfrac{670}{3},\dfrac{670}{3})$. □

Bài 18: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}=3\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a}}\\\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}=3\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a}}\end{cases}\quad \text{Với } a>1 \text{ và } a \text{ là hằng số.}$$

Giải

Đặt $A=\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+a}, B=\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz: $\begin{cases}A^2\leqslant 3(3a+x+y+z)\\B^2\leqslant 3(3a-x-y-z)\end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có: $A^2+B^2\leqslant 18a$ (*)
Mặt khác theo giả thiết ta lại có:

$$A^2+B^2=9\left(\frac{a^2+1}{a}+\frac{a^2-1}{a}\right)=18a$$

Vậy dấu "=" trong (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a+x}=\sqrt{a+y}=\sqrt{a+z}=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a}}\\\sqrt{a-x}=\sqrt{a-y}=\sqrt{a-z}=\sqrt{\dfrac{a^2-1}{a}}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{a}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z)=$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$. □

Bài 19: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_{2010}}=2010\sqrt{\dfrac{2011}{2010}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_{2010}}=2010\sqrt{\dfrac{2011}{2010}} \end{cases}$

Giải

Điều kiện: -1 $\leqslant x_i \leqslant$ 1 (i= 1, 2, 3, ..., 2010). Ta có

$$2010^2.\frac{2011}{2010}=(\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_{2010}})^2 \leqslant 2010(2010+x_1+x_2+...+x_{2010})$$

Suy ra $x_1+x_2+...+x_{2010} \geqslant 1$ (1)
Lại có

$$2010^2.\frac{2011}{2010}=(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_{2010}})^2 \leqslant 2010(2010-x_1-x_2-...-x_{2010})$$

Do đó $x_1+x_2+...+x_{2010} \leqslant 1$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $x_1+x_2+...+x_{2010}=1$
Do đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 1+x_1=1+x_2=...=1+x_{2010} \\ 1+x_1=1+x_2=...=1+x_{2010} \\ x_1+x_2+...+x_{2010}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_{2010}=\frac{1}{2010}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x_i=\dfrac{1}{2010}$ $(i=\overline{1,2010})$ □

Bài 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}=3\sqrt{3} \\ x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=\dfrac{7}{27}+2xyz(*) \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Bài này có thể giải bằng cách bình thường vẫn cho ta kết quả,nhưng để ý phương trình (*) chính là BĐT IMO 1984. Như thế hệ có liên quan đến BĐT. Phương pháp BĐT sẽ cho ta lời giải đẹp và gọn hơn trong bài toán này.
Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow xy+yz+zx-2xyz=\frac{7}{27}$$

Lại có:

$$xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)=(1-2x)(1-2y)(1-2z)$$

$$\Rightarrow 9xyz \geqslant 4(xy+yz+zx)-1 \Leftrightarrow 2xyz \geqslant \frac{8(xy+yz+zx)-2}{9}$$

Ta phải chứng minh $xy+yz+zx \leqslant \dfrac{1}{3}=\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ (đúng)
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Thử lại vào hệ phương trình thấy thỏa mãn.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z)=($\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$). □

Bài 21: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y) = x^2 - xy + y^2 \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = 16 \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x, y \neq 0$.
Đặt $a = \dfrac{1}{x}$ và $b = \dfrac{1}{y}$
Từ giả thiết ta suy ra $\dfrac{1}{ab}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{b^2} \Leftrightarrow a + b = a^2 - ab + b^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^2$$

Ta có bất đẳng thức sau: $a^2 - ab + b^2 \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a + b \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 0 \leqslant a + b \leqslant 4$
$\Rightarrow \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = (a+b)^2 \leqslant 16$
Đẳng thức xảy ra nên $a = b \Rightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = \dfrac{1}{2}$ □.

Bài 22: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}$

Giải

Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_{2009})$ là một nghiệm của hệ.
Không giảm tổng quát giả sử $x_1^2 \geqslant x_2^2 \geqslant ... \geqslant x_{2009}^2$.
Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có

$$2009\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i\right)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geqslant 2009 \ (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebysev cho các bộ số $(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{2009}^2)$ và $(x_1^6, x_2^6, \ldots, x_{2009}^6)$ được sắp thứ tự ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^6\right) \leqslant 2009\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \geqslant \sum_{i=1}^{2009} x_i^6 \ (3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{2009} = 1$
Thử lại ta thấy $x_i = 1$ $(i = \overline{1, 2009})$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. □

Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^3 = 9 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = (1 + \sqrt[3]{xyz})^3 \end{cases}$

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3 \end{cases}$

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}} = 3\sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^7 + 1 = (x+1)(x^2+1)(x^4+1) \\ x^7 + 1 = (y+1)(y^2+1)(y^4+1) \end{cases}$

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 30\dfrac{y}{x^2} + 4y = 2007 \\ 30\dfrac{z}{y^2} + 4z = 2007 \\ 30\dfrac{x}{z^2} + 4x = 2007 \end{cases}$

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{3y^3}{y^4 + y^2 + 1} = z \\ \dfrac{4z^4}{z^6 + z^4 + z^2 + 1} = t \\ \dfrac{5t^5}{t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1} = x \end{cases}$

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}$

TỔNG HỢP CÁC BÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Hệ phương trình hữu tỉ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 2y = 0 \ (1) \\ x^4 - 8x^2y + 3x^2 + 4y^2 = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

Nhận thấy ở phương trình (1) có hạng tử x^2+2y và ở phương trình (2) lại có hạng tử x^4+4y^2,Nên ta nghĩ đến việc phân tích cả 2 phương trình đêu có hạng tử $x^2 + 2y$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 2y + x - 4xy = 0 \\ x^4 + 4x^2y + 4y^2 + 3x^2 - 12x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2y) + x(1 - 4y) = 0 \\ (x^2 + 2y)^2 + 3x^2(1 - 4y) = 0 \end{cases}$$

Đặt $x^2 + 2y = a$ và $1 - 4y = b$ ta có HPT:

$$\begin{cases} a + xb = 0 \\ a^2 + 3x^2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2b^2 + 3x^2b = 0 \Leftrightarrow x^2b(b+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ b = 0 \\ b = -3 \end{array}\right.$$

⁎ Với $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

⁎ Với $b = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + x + \dfrac{1}{2} = 0$ (Vô nghiệm)

⁎ Với $b = -3 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0); (2; 1); (1; 1)$ □

Bài 2: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 81x^3y^2 - 81x^2y^2 + 33xy^2 - 29y^2 = 4 \ (1) \\ 25y^3 + 9x^2y^3 - 6xy^3 - 4y^2 = 24 \ (2) \end{cases}$

Giải

Nhận thấy VT(1) có nhân tử y^2 chung. Vì thế chia cả hai vế phương trình (1) cho $y^2 (y \neq 0)$ rồi biến đổi phương trình (1) về dạng $f(t) = 0$.Từ đó ta sẽ biến đổi phương trình (2) về dạng $f(t') = 0$.

Nhận thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thoả hệ. Xét $xy \neq 0$.

Hệ tương đương với $\begin{cases} 81x^3 - 81x^2 + 33x - 29 = \dfrac{4}{y^2} \\ \dfrac{24}{y^3} + \dfrac{4}{y} = 25 + 9x^2 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3x-1)^3 + 2(3x-1) = 24 + \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 \\ 3\left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + 2.\dfrac{2}{y} = 24 + (3x-1)^2 \end{cases}$

Đặt $3x - 1 = a$ và $\dfrac{2}{y} = b$, ta có hệ đối xứng loại 2: $\begin{cases} 3a^3 + 2a = 24 + b^2 \\ 3b^3 + 2b = 24 + a^2 \end{cases}$

Trừ vế theo vế của hệ ta được

$$\begin{aligned} &3(a-b)(a^2 + ab + b^2) + 2(a-b) + (a-b)(a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(3a^2 + 3ab + 3b^2 + 2 + a + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Thay vào một trong hai phương trình của hệ ta có

$$3a^3 - a^2 + 2a - 24 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(3a^2+5a+8) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ \dfrac{2}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y) = (1;1)$ □

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 \ (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \ (2) \end{cases}$

Giải

Xét $(1) + (2).3$ ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + 3xy^2 - 6xy + 3x + 49 + 3x^2 - 24xy + 3y^2 - 30y + 75x + 27 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 + 3(y-5)^2] = 0 \\ & \Leftrightarrow x = -1; y = 5 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-1;5)$. □

⊛ Nhận xét: Bài toán trên cũng có thể giải bài phương pháp ẩn phụ tổng - hiệu. Cụ thể đặt $x = a + b; y = a - b$.

Bài 4: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}$

Giải

⋇ Với $x = 0$ hoặc $y = 0$ hệ vô nghiệm

⋇ Với $x \neq 0$ và $y \neq 0$ ta có hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 45.\dfrac{x^2}{y} + 75.\dfrac{x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 3.x.\dfrac{5}{y}\left(3x + \dfrac{5}{y}\right) = 6 \end{cases}$$

Đặt $a = 3x$ và $b = \dfrac{5}{y}$ ($b \neq 0$).Hệ trở thành:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 9 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{2}\right); \left(\dfrac{2}{3}; 5\right)$ □

Bài 5: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ 2\left(x^3 + y^3\right) + 6x^2 = 3\left(x^2 + y^2\right) + 5 \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ 2x^3+6x^2+2y^3=3(3-2x)+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ 2x^3+6x^2+6x+2+2y^3=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ (x+1)^3+y^3=8\end{cases}$$

Đặt $a=x+1$ và $b=y$, Hệ trở thành:

$$(*)\begin{cases}a^2+b^2=4\\ a^3+b^3=8\end{cases}$$

Đến đây ta sẽ lập phương trình thuần nhất từ hệ trên:

$$(*) \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^3=\left(a^3+b^3\right)^2 \Leftrightarrow 3a^2b^2\left(a^2+b^2\right)-2a^3b^3=0$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2\left(3a^2+3b^2-2ab\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $a=0 :\Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow y=2$
⋇ Nếu $b=y=0 :\Leftrightarrow x=1$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;2),(1;0)$ □

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2y(x^2-y^2)=3x\\ x(x^2+y^2)=10y\end{cases}$

Giải

Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì hệ có nghiệm $(x;y)=(0;0)$. Xét $xy\neq 0$, chia hai phương trình vế theo vế ta có:

$$\frac{2y(x^2-y^2)}{x(x^2+y^2)}=\frac{3x}{10y} \Leftrightarrow 20y^2(x^2-y^2)=3x^2(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0 \Leftrightarrow (x^2-4y^2)(3x^2-5y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=4y^2\\ x^2=\dfrac{5y^2}{3}\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x^2=4y^2$ ta có hệ

$$\begin{cases}2y.3y^2=3x\\ x.5y^2=10y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y^3=x\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2;\ y=1\\ x=-2;\ y=-1\end{array}\right.$$

⋇ Nếu $x^2=\dfrac{5y^2}{3}$ ta có hệ

$$\begin{cases}2y.\dfrac{2y^2}{3}=3x\\ x.\dfrac{8y^2}{3}=10y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4y^3=9x\\ 4xy=15\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{15}{2\sqrt[4]{135}};\ y=\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\\ x=\dfrac{-15}{2\sqrt[4]{135}};\ y=\dfrac{-\sqrt[4]{135}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (0;0), (-2;-1), (2;1), \left(\dfrac{15}{2\sqrt[4]{135}}; \dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-15}{2\sqrt[4]{135}}; \dfrac{-\sqrt[4]{135}}{2}\right)$ □

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z^2 + 2xyz = 1\,(1) \\ 3x^2y^2 + 3xy^2 = 1 + x^3y^4\,(2) \\ z + zy^4 + 4y^3 = 4y + 6y^2z\,(3) \end{cases}$

Giải

Vì $z = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên (1) $\Leftrightarrow xy = \dfrac{1-z^2}{2z}$

Đặt $z = \tan\varphi\,(*)$ với $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}\,(a) \Rightarrow \cos\varphi \neq 0, \sin\varphi \neq 0$

Ta có: $xy = \dfrac{1-z^2}{2z} = \dfrac{1-\tan^2\varphi}{2\tan\varphi} = \cot 2\varphi$

Thay vào (2) ta được :

$$3\cot^2 2\varphi + 3y\cot 2\varphi = 1 + y\cot^3 2\varphi \Leftrightarrow y = \frac{3\cot^2 2\varphi - 1}{\cot^3 2\varphi - 3\cot 2\varphi} = \frac{1}{\cot 6\varphi} = \tan 6\varphi$$

Ta suy ra: $x = \cot 2\varphi.\cot 6\varphi$

Thay vào (3) ta được :

$$z = \frac{4\tan 6\varphi - 4\tan^3 6\varphi}{1 - 6\tan^2 6\varphi + \tan^4 6\varphi} = \tan 24\varphi\ (**)$$

Từ $(*)$và $(**)$ta có:

$$\tan 24\varphi = \tan\varphi \Leftrightarrow 24\varphi = \varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi = \frac{k\pi}{23}, k \in \mathbb{Z}$$

Với $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ta thu được:

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{23}, \pm\frac{2\pi}{23}, \pm\frac{3\pi}{23}, \pm\frac{4\pi}{23}, \pm\frac{5\pi}{23}, \pm\frac{6\pi}{23}, \pm\frac{7\pi}{23}, \pm\frac{8\pi}{23}, \pm\frac{9\pi}{23}, \pm\frac{10\pi}{23}, \pm\frac{11\pi}{23}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là:

$(x;y;z) = (\cot 2\varphi.\cot 6\varphi; \tan 6\varphi; \tan\varphi)$ với

$\varphi = \pm\dfrac{\pi}{23}, \pm\dfrac{2\pi}{23}, \pm\dfrac{3\pi}{23}, \pm\dfrac{4\pi}{23}, \pm\dfrac{5\pi}{23}, \pm\dfrac{6\pi}{23}, \pm\dfrac{7\pi}{23}, \pm\dfrac{8\pi}{23}, \pm\dfrac{9\pi}{23}, \pm\dfrac{10\pi}{23}, \pm\dfrac{11\pi}{23}$ □

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Giải

Từ hệ suy ra $xy \neq 0$ và $x \neq \pm 1$. Bình phương hai phương trình và cộng lại ta có

$$\left[\frac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}\right]^2 + \left[\frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}\right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(y^2+1)^2 + y^2(x^2-1)^2 = (x^2+y^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2 + 1 - x^2 - y^2)(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

⋇ Với $y=1$ ta có hệ $\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

⋇ Với $y=-1$ ta có $\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{-4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;1),(\frac{1}{3};-1)$ □

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+xy=z^{2^{2003}}+2z^{2^{2002}}\\ x^4+y^4=2z^{2^{2004}}\\ (x+y)^{z-1}=(z+2004)^{x-y}\end{cases}\quad(I)$

Giải

Từ hệ ta có:

$$2z^{2^{2004}}=x^4+y^4\geqslant 2x^2y^2\Rightarrow xy\leqslant z^{2^{2003}}\ (1)$$

Lại có

$$(x+y)^4\leqslant 4\left(x^2+y^2\right)^2\leqslant 4.2\left(x^4+y^4\right)=16z^{2^{2004}}\Rightarrow x+y\leqslant 2z^{2^{2002}}\ (2)$$

(1) và (2) cho ta:

$$x+y+xy\leqslant z^{2^{2003}}+2z^{2^{2002}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z^{2^{2002}}$. Khi đó ta có:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z^{2^{2002}}\\ (2x)^{z-1}=(z+2004)^{x-y}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z=1\\ \begin{cases}x=y=\dfrac{1}{2}\\ z=\pm\dfrac{1}{\sqrt[2^{2002}]{2}}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm: $(x;y;z)=(1;1;1),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{1}{\sqrt[2^{2002}]{2}}\right)$ □

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z+t=15\ (1)\\ x^2+y^2+z^2+t^2=65\ (2)\\ x^3+y^3+z^3+t^3=315\ (3)\\ xt=yz\ (4)\end{cases}(I)$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow(x+t)^2+(y+z)^2-2xt-2yz=65\\ &\Leftrightarrow(x+y+z+t)^2-2(x+t)(y+z)-4xt=65(do(4))\\ &\Leftrightarrow(x+y+z+t)^2-2(x+t)\left[15-(x+t)\right]-4xt=65(do(1))\\ &\Leftrightarrow 15^2-2(x+t)\left[15-(x+t)\right]-4xt=65\\ &\Leftrightarrow(x+t)^2-15(x+t)-2xt=-80(5)\end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
&(3) \Leftrightarrow (x+t)^3+(y+z)^3-3xt(x+t)-3yz(y+z)=315\\
&\Leftrightarrow (x+t)^3+(y+z)^3-3xt(x+y+z+t)=315(do(4))\\
&\Leftrightarrow (x+y+z+t)^3-3(x+t)(y+z)(x+y+z+t)-45xt=315(\text{do }(1))\\
&\Leftrightarrow 15^3-45(x+t)\left[15-(x+t)\right]-45xt=315\\
&\Leftrightarrow (x+t)^2-15(x+t)-xt=-68(6)
\end{aligned}$$

Ta có: $(6)-(5) \Rightarrow xt=12$ (5)
Thay vào (5) ta được:

$$(x+t)^2-15(x+t)+56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+t=8\\ x+t=7\end{array}\right.$$

Kết hợp (5) ta tìm được $(x;t)=(2;6),(3;4)$. Từ đó nghiệm của hệ là
$(x;y;z;t)=(6;4;3;2),(6;3;4;2),(2;4;3;6),(2;3;4;6),(4;6;2;3),(4;2;6;3),(3;6;2;4),(3;2;6;4)$ □

Bài 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3+x^2(y+z)=xyz+14\,(1)\\ y^3+z^3+y^2(x+z)=xyz-21\,(2)\\ z^3+x^3+z^2(x+y)=xyz+7\,(3)\end{cases}$

Giải

$$\begin{aligned}
&(1)+(2)+(3) \Rightarrow x^3+y^3+z^3+\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)=3xyz\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)=0\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2=0\,(*)\\ x+y+z=0\,(**)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

⋇ Từ (∗) ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow VT_{(5)}\geqslant 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=0$
⋇ Từ (**) ta có: $z=-(x+y)$
Thay vào (1) và (3) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^3+xy(x+y)=14\\ x^3+xy(x+y)=7\end{cases} (I)$$

* Xét $x=0$ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=14\\ 0=7\end{cases}$ (vô nghiệm)
Xét $x\neq 0$. Đặt: $y=kx$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3\left(k^3+k^2+k\right)=14\,(4)\\ x^3\left(k^2+k+1\right)=7\,(5)\end{cases} \Rightarrow \frac{k^3+k^2+k}{k^2+k+1}=2 \Leftrightarrow k^3-k^2-k-2=0 \Leftrightarrow k=2 \Leftrightarrow y=2x$$

Thay vào (5) ta được: $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = -3$
Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x; y; z) = (1; 2; -3)$ □

Bài 12: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$

Giải

Ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz) = 2\,(1) \\ y(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz) = 30\,(2) \\ z(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy) = 16\,(3) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2) - 2(3)$ ta có:

$$(x + y - 2z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \Leftrightarrow y = 2z - x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0\,(l) \end{array}\right.$$

Thay $y = 2z - x$ vào phương trình (1) và (3) ta có:

$$x(2x^2 + z^2 - 2xz) = 2\,(4)$$
$$z(4x^2 + 5z^2 - 4xz) = 16(5)$$

Đặt $z = kx$ ta tìm được $k = 2$
Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x, y, z) = (1, 3, 2)$ □

Bài 13: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = \dfrac{-5}{4}\ (1) \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = \dfrac{-5}{4}\ (2) \end{cases}$$

(ĐH khối A - 2006)

Giải

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + y + xy + xy(x^2 + y) = \dfrac{-5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = \dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + y;\ v = xy$ ta có hệ

$$\begin{cases} u + v + uv = \dfrac{-5}{4} \\ u^2 + v = \dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{-5}{4} - u^2 \\ u^3 + u^2 + \dfrac{u}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0,\ v = \dfrac{-5}{4} \\ u = \dfrac{-1}{2},\ v = \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$$

⋇ Với $u = 0,\ v = \dfrac{-5}{4}$ ta tìm được $(x;y) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)$

⋇ Với $u = \dfrac{-1}{2}, v = \dfrac{-3}{2}$ ta tìm được $(x;y) = \left(1; \dfrac{-3}{2}\right)$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right), \left(1; \dfrac{-3}{2}\right)$ □

Bài 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 = \dfrac{4yz}{x} \\ z^2 + x^2 - y^2 = \dfrac{4zx}{y} \\ x^2 + y^2 - z^2 = \dfrac{4xy}{z} \end{cases}$

Giải

ĐXKĐ: $x, y, z \neq 0$

Nhân hai vế của các phương trình lần lượt với x^2, y^2, z^2 ta có:

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 - x^4 = 4xyz \\ y^2z^2 + x^2y^2 - y^4 = 6xyz \\ x^2z^2 + y^2z^2 - z^4 = 8xyz \end{cases}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
&(1) - 2\cdot(2) + (3) \Leftrightarrow 2y^4 - y^2z^2 - x^2y^2 - x^4 + 2x^2z^2 - z^4 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2(2y^2 - x^2 - z^2) - (x^2 - z^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2\left[2y^2 - \left(y^2 + \frac{6xz}{y}\right)\right] - (x^2 - z^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y^4 - 6xyz - (x^2 - z^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - x^2 + z^2)(y^2 + x^2 - z^2) - 6xyz = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4yz}{x} \cdot \frac{8xy}{z} - 6xyz = 0 \\
&\Leftrightarrow 32y^2 - 6xyz = 0 \Leftrightarrow 16y - 3xz = 0
\end{aligned}$$

Thay $xz = \dfrac{16}{3}$ vào (2) và $y = \dfrac{3xz}{16}$ vào (1) và (3) ta có:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 32 \\ \dfrac{-1}{2}x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính theo $(x^2; y^2; z^2)$, ta tìm được $(x^2, y^2, z^2) = \left(64, \dfrac{288}{5}, \dfrac{128}{5}\right)$

Từ hệ ban đầu ta thấy với những giá trị $(x^2; y^2; z^2)$ trên, các hạng tử $\dfrac{yz}{x}, \dfrac{zx}{y}, \dfrac{xy}{z}$ đều dương.

Giả sử $x < 0$, từ (1) ta có $yz < 0$. Tương tự với $y < 0$ và $z < 0$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x, y, z) = \left(8, 12\sqrt{\dfrac{2}{5}}, 8\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right), \left(8, -12\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -8\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right),$

$\left(-8,12\sqrt{\frac{2}{5}},-8\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\left(-8,-12\sqrt{\frac{2}{5}},8\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ và các hoán vị □

Bài 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2z\left(x+y\right)+1=x^2-y^2\,(1) \\ y^2+z^2=1+2xy+2zx-2yz\,(2) \\ y\left(3x^2-1\right)=-2x\left(x^2+1\right)(3) \end{cases}$

Giải

Vì $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa phương trình (3)nên:

$$(3)\Leftrightarrow y=\frac{-2x\left(x^2+1\right)}{3x^2-1}\Leftrightarrow x+y=\frac{3x^3-x-2x\left(x^2+1\right)}{3x^2-1}\Leftrightarrow x+y=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$$

Đặt $x=\tan\varphi,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}\Rightarrow\cos\varphi\neq 0,\cos 3\varphi\neq 0$

Ta có:

$$\tan\varphi+y=\frac{\tan^3\varphi-3\tan\varphi}{3\tan^2\varphi-1}\Leftrightarrow y=\tan 3\varphi-\tan\varphi$$

$$(1)\Leftrightarrow z=\frac{x^2-y^2-1}{2\left(x+y\right)}\text{ (do } x=-y\text{không thỏa phương trình (1)}\Rightarrow\tan 3\varphi\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\left(2\tan\varphi-\tan 3\varphi\right).\tan 3\varphi-1}{2\tan 3\varphi}=\frac{2\tan\varphi.\tan 3\varphi-\tan^2 3\varphi-1}{2\tan 3\varphi}$$

$$\Leftrightarrow z=\tan\varphi-\frac{\tan 3\varphi+\cot 3\varphi}{2}=\tan\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi}+\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}\right)$$

$$\Leftrightarrow z=\tan\varphi-\frac{1}{\sin 6\varphi}$$

$$(2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2zx+2yz=1+x^2\Leftrightarrow\left(y+z-x\right)^2=1+x^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\tan 3\varphi-\tan\varphi+\tan\varphi-\frac{1}{\sin 6\varphi}-\tan\varphi\right)^2=1+\tan^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi}-\frac{1}{2\sin 3\varphi.\cos 3\varphi}-\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2\sin^2 3\varphi-1}{2\sin 3\varphi.\cos 3\varphi}-\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}\quad\Leftrightarrow\left(\frac{\cos 6\varphi}{\sin 6\varphi}+\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\cos 6\varphi.\cos\varphi+\sin 6\varphi.\sin\varphi}{\sin 6\varphi.\cos\varphi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Leftrightarrow\left(\frac{\cos 5\varphi}{\sin 6\varphi.\cos\varphi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\Leftrightarrow\cos 5\varphi=\pm\sin 6\varphi\Leftrightarrow\cos 5\varphi=\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)\\ \cos 5\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+6\varphi\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)+k2\pi\\ 5\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}+6\varphi\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=\frac{\pi}{22}+\frac{k2\pi}{11},\varphi=\frac{\pi}{2}-k2\pi\\ \varphi=-\frac{\pi}{22}+\frac{k2\pi}{11},\varphi=-\frac{\pi}{2}-k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Với: $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}\Rightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{22};\pm\frac{3\pi}{22};\pm\frac{5\pi}{22};\pm\frac{7\pi}{22};\pm\frac{9\pi}{22}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

$$(x;y;z) = \left(\tan\varphi; \tan 3\varphi - \tan\varphi; \tan\varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi}\right), \varphi = \pm\frac{\pi}{22}; \pm\frac{3\pi}{22}; \pm\frac{5\pi}{22}; \pm\frac{7\pi}{22}; \pm\frac{9\pi}{22} \ \square$$

Bài 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases} \quad (I)$

Giải

Đặt:$a = x+2; b = y+3$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0 \,(1) \\ a^2 + a - 7b + 3bz = 0 \,(2) \\ 8a^2 - 2a + 18\left(b^2 + ab + bz - 4b\right) - 30z + 94 = 0 \,(3) \end{cases}$$

Lại có:

$$(1) \Leftrightarrow b^2 + ab + bz - 4b = -a^2 \,(*)$$

Thay $(*)$vào (3) ta có:

$$8a^2 - 2a - 18a^2 - 30z + 94 = 0$$
$$\Leftrightarrow 10a^2 + 2a + 30z - 94 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}$$

Thay $z = -\dfrac{5a^2 + a - 47}{15}$ vào (2)ta có:

$$a^2 + a - 7b - b\left(\frac{5a^2 + a - 47}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5a^2 + a - 12}{15}\right) b = a^2 + a$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{5\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12} \text{ (Vì } a = \frac{-1 \pm \sqrt{241}}{10} \text{ không là nghiệm của phương trình)}$$

Nhân 2 vế của phương trình (1)với 3 rồi trừ cho phương trình (2)vế theo vế, ta được:

$$2a^2 - a + 3ab + 3b^2 - 5b = 0 \,(4)$$

Thay $b = \dfrac{5\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12}$vào (4) ta được:

$$2a^2 - a + \frac{15a\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12} + 3\left[\frac{5\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12}\right]^2 - \frac{25\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12} = 0$$

$\Leftrightarrow \left(2a^2 - a\right)\left(5a^2 + a - 12\right)^2 + \left[15a\left(a^2 + a\right) - 25\left(a^2 + a\right)\right]\left(5a^2 + a - 12\right) + 75\left(a^2 + a\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 50a^6 + 70a^5 - 208a^4 - 94a^3 + 482a^2 + 156a = 0$

$\Leftrightarrow 25a^6 + 35a^5 - 104a^4 - 47a^3 + 241a^2 + 78a = 0$

$\Leftrightarrow a(a+2)\left(25a^4 - 15a^3 - 74a^2 + 101a + 39\right) = 0$

$\Leftrightarrow a(a+2)\left(5a^2 - 14a + 13\right)\left(5a^2 + 11a + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -2 \vee a = \dfrac{-11 \pm \sqrt{61}}{10}$

※ TH1: $a = 0 :\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ z = \dfrac{47}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

※ TH2: $a = -2 :\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5}{3} \\ z = \dfrac{29}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$

※ TH3: $a = \dfrac{-11 + \sqrt{61}}{10} :\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{17 - 2\sqrt{61}}{15} \\ z = \dfrac{39 + \sqrt{61}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-31 + \sqrt{61}}{10} \\ y = -\dfrac{28 + 2\sqrt{61}}{15} \end{cases}$

※ TH4: $a = \dfrac{-11 - \sqrt{61}}{10} :\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{17 + 2\sqrt{61}}{15} \\ z = \dfrac{39 - \sqrt{61}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{31 + \sqrt{61}}{10} \\ y = \dfrac{-28 + 2\sqrt{61}}{15} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là:
$(x; y; z) = \left(-2; -3; \dfrac{47}{15}\right), \left(-4; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{29}{15}\right),$
$\left(\dfrac{-31 + \sqrt{61}}{10}; -\dfrac{28 + 2\sqrt{61}}{15}; \dfrac{39 + \sqrt{61}}{15}\right), \left(-\dfrac{31 + \sqrt{61}}{10}; \dfrac{-28 + 2\sqrt{61}}{15}; \dfrac{39 - \sqrt{61}}{15}\right)$ □

Bài 17: Cho các tham số dương a, b, c. Tìm nghiệm dương của hệ

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \, (1) \\ 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc \, (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{xz} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4 \, (3)$$

Đặt: $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{yz}}; y_1 = \dfrac{b}{\sqrt{xz}}; z_1 = \dfrac{c}{\sqrt{xy}}$ ta có:

$$(3) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1.y_1.z_1 = 4 \, (4)$$

Dễ thấy: $0 < x_1, y_1, z_1 < 2$ nên tồn tại các giá trị u, vthỏa: $0 < u, v < \dfrac{\pi}{2}$và $x_1 = 2\sin u; y_1 = 2\sin v$
. Khi đó:

$$(4) \Leftrightarrow z_1^2 + 4z_1.\sin u.\sin v + 4\sin^2 u + 4\sin^2 v - 4 = 0$$

Có $\Delta' = (2\sin u.\sin v)^2 - \left(4\sin^2 u + 4\sin^2 v - 4\right) = 4\left(1 - \sin^2 u\right)\left(1 - \sin^2 v\right) = 4\cos^2 u.\cos^2 v > 0$
Vậy

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -2\sin u.\sin v - 2\cos u.\cos v < 0 \\ z_1 = -2\sin u.\sin v + 2\cos u.\cos v > 0 \end{array}\right.$$

Do đó: $a = 2\sqrt{yz}.\sin u; b = 2\sqrt{zx}.\sin v; c = 2\sqrt{xy}\left(\cos u.\cos v - \sin u.\sin v\right)$
Thay vào (1) ta có:

$$x + y + z = 2\sqrt{yz}.\sin u + 2\sqrt{zx}.\sin v + 2\sqrt{xy}\left(\cos u.\cos v - \sin u.\sin v\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{2} = 0$$

Ta tính được: $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \dfrac{b\sqrt{x}}{2\sqrt{zx}} + \dfrac{a\sqrt{y}}{2\sqrt{yz}} = \dfrac{a+b}{2\sqrt{z}} \Rightarrow z = \dfrac{a+b}{2}$
Tương tự, ta cũng có: $y = \dfrac{c+a}{2}; x = \dfrac{b+c}{2}$
Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y;z) = \left(\dfrac{b+c}{2};\dfrac{c+a}{2};\dfrac{a+b}{2}\right)$ □

Bài 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xz = x + 8\,(1) \\ 4y^2 = 7xz - 3x - 28\,(2) \\ x^2 + 4z^2 = 140 - 4y^2\,(3) \end{cases}$

Giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow x = xz - 8$
Thay vào (2) ta được: $4y^2 = 7xz - 3\left(xz - 8\right) - 28 \Leftrightarrow y^2 = xz - 1\,(y^2 \geqslant 0 \Rightarrow xz \geqslant 1)$
Thay vào (3) ta được:

$$x^2 + 4z^2 = 140 - 4\left(xz - 1\right) \Leftrightarrow (x + 2z)^2 = 144 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2z = 12 \\ x + 2z = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2z + 12\,(4) \\ x = -2z - 12\,(5) \end{array}\right.$$

Thay (4) vào (1) ta được:

$$z\left(-2z + 12\right) = -2z + 12 + 8 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y^2 = 15 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{15} \\ z = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \end{array}\right.$$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$z\left(-2z - 12\right) = -2z - 12 + 8 \Leftrightarrow z^2 + 5z - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{-5 + \sqrt{33}}{2} \Rightarrow x = -7 - \sqrt{33}\,(*) \\ z = \dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2} \Rightarrow x = -7 + \sqrt{33} \Rightarrow y^2 = \sqrt{33} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt[4]{33} \end{array}\right.$$

Loại (*) do $xz < 0$. Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm là:
$(x;y;z) = \left(8;\pm\sqrt{15};2\right), (2;\pm 3;5), \left(-7 + \sqrt{33};\pm\sqrt[4]{33};\dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right)$ □

Bài 19: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 0(1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10(2) \\ x^7 + y^7 + z^7 = 350(3) \end{cases}$

Giải

Từ (1), (2) ta có $xy + yz + zx = -5$ (3)
Lại có: (1) $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz(4)$

$$\begin{aligned}
&(2)\times(4) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right) = 30xyz\\
&\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+x^2z^2(x+z) = 30xyz\\
&\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5-x^2y^2z-xy^2z^2-x^2yz^2 = 30xyz\\
&\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5-xyz(xy+yz+zx) = 30xyz\\
&\Leftrightarrow x^5+y^5+z^5+5xyz = 30xyz \Leftrightarrow x^5+y^5+z^5 = 25xyz\\
&(2)\times(5) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^5+y^5+z^5\right) = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7+x^2y^2(x^3+y^3)+y^2z^2(y^3+z^3)+z^2x^2(z^3+x^3) = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7+x^2y^2(3xyz-z^3)+y^2z^2(3xyz-x^3)+z^2x^2(3xyz-y^3) = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7+3xyz(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-x^2y^2z^2(x+y+z) = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7+3xyz\left[(xy+yz+xz)^2-2xyz(x+y+z)\right] = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7+45xyz = 250xyz\\
&\Leftrightarrow x^7+y^7+z^7 = 135xyz(6)
\end{aligned}$$

Thay (6) vào (3) ta có: $135xyz = 350 \Leftrightarrow xyz = 2$. Vậy ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ xy+xz+yz=-5\\ xyz=2 \end{cases}$$

Suy ra x, y, zlà nghiệm của phương trình $t^3 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1+\sqrt{2}, t = -2, t = 1-\sqrt{2}$
Vậy hệ có nghiệm là $\left(1+\sqrt{2}; -2; 1-\sqrt{2}\right)$ và các hoán vị $\square$.

Bài 20: Giải hệ phương trình (∗) $\begin{cases} 30x - 4y + \dfrac{1}{xy} = 2012\\ 4y - 2012z + \dfrac{1}{zx} = 30\\ 2012y - 30z + \dfrac{1}{yz} = 4 \end{cases}$

Giải

⊛ Ý tưởng: Rõ ràng các số $30, 4, 2012$ được chọn ngẫu nhiên do đó ta có thể đặt $30 = a; 4 = b; 2012 = c$ để thấy rõ hơn ý tưởng bài toán. Khi đó, như đã nói ở trên, ta cần tính a, b, c theo x, yz. Dễ thấy hệ thu được là một hệ tuyến tính 3 ẩn với x, y, z là tham số. Có thể dùng công thức Cramer để tính nghiệm, nhưng do trong chương trình phổ thông không có công thức Cramer cho hệ 3 ẩn nên ta sẽ đưa về hệ 2 ẩn.
⊛ Lời giải:
Đặt $30 = a; 4 = b; 2012 = c$ ta có HPT:

$$(II')\begin{cases} ax - by + \dfrac{1}{xy} = c\ (1)\\ by - cz + \dfrac{1}{zx} = a\ (2)\\ cy - az + \dfrac{1}{yz} = b\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = ax - by + \dfrac{1}{xy}\\ bz - (ax - by + \dfrac{1}{xy}).x + \dfrac{1}{zx} = a\ (4)\\ (ax - by + \dfrac{1}{xy}).y - az + \dfrac{1}{yz} = b\ (5) \end{cases}$$

Xét $(4),(5)$ là 1 hệ 2 ẩn theo a,b. Dùng công thức Cramer ta tính được:

$$\begin{cases} D = \begin{vmatrix} x^2+1 & -xy-z \\ xy-z & -y^2-1 \end{vmatrix} = -(1+x^2+y^2+z^2) \neq 0 \\ D_a = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{y} & -xy-z \\ \dfrac{-1}{yz}-\dfrac{1}{x} & -y^2-1 \end{vmatrix} = \dfrac{-(1+x^2+y^2+z^2)}{xz} \\ D_b = \begin{vmatrix} x^2+1 & \dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{y} \\ xy-z & -\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{-(x^2+y^2+z^2+1)}{yz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{D_a}{D} = \dfrac{1}{xz} \\ b = \dfrac{D_b}{D} = \dfrac{1}{yz} \\ c = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

Trở lại HPT đầu ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xz = \dfrac{1}{30} \\ yz = \dfrac{1}{4} \\ xy = \dfrac{1}{2012} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{\sqrt{15090}} \\ y = \sqrt{\dfrac{15}{4024}} \\ z = \sqrt{\dfrac{503}{30}} \end{cases}$$

Vậy $(*)$ có nghiệm $(x;y;z) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{15090}}; \sqrt{\dfrac{15}{4024}}; \sqrt{\dfrac{503}{30}}\right)$ □

Bài 21: Giải hệ phương trình $(*)\begin{cases} x^4+4x^2+y^2-4y=2 \\ x^2y+2x^2+6y=23 \end{cases}$

Giải

Hệ tương đương $\begin{cases} t-4y=2-x^4-4x^2 \\ y(x^2+6)=23-2x^2 \end{cases}$ với $t=y^2$

Ta tính được $\begin{cases} D = x^2+6 \\ D_t = -x^6-10x^4-30x^2+104 \\ D_y = 23-2x^2 \end{cases}$

Do $t=y^2$ nên $\dfrac{D_t}{D} = \left(\dfrac{D_y}{D}\right)^2 \Leftrightarrow (x^2+6)(-x^6-10x^4-30x^2+104) = (23-2x^2)^2$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4+16x^2+95)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)=(-1;3),(1;3)$ □

Bài 22: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \\ x(y^3-x^3)=7 \end{cases}$

Giải

Ta có:

$$x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \Leftrightarrow (x^4-xy^3)+(x^3y-x^2y^2)-9(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x(x^2+xy+y^2)+x^2y-9\right]=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[x(x+y)^2-9\right]=0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta thấy $x \neq y$ nên từ biến đổi trên, suy ra:

$$x(x+y)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x(x+y)^2 = 9 \ (*)$$

Ta có: $x(y^3 - x^3) = 7 \Leftrightarrow y^3 - x^3 = \frac{7}{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}$.
Thay vào (*), ta được:

$$x(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}})^2 = 9$$

Ta sẽ chứng minh rằng vế trái là một hàm đồng biến theo biến x. Thật vậy:

$$x(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}})^2 = x\left(x^2 + 2x\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + \sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2}\right)$$

$$= x^3 + 2x^2.\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + x\sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2} = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4+7)^2}$$

Từ (*) suy ra $x > 0$ và trong biểu thức ở trên, các số mũ của biến x đều dương nên đây là hàm đồng biến; suy ra nó có không quá một nghiệm.
Thay trực tiếp $x = 1$ vào biểu thức, ta thấy thỏa.
Vậy hệ đã cho có đúng một nghiệm là: $(x, y) = (1, 2)$ □.
⊛ Nhận xét: Điểm đặc biệt của bài này là xử lí được hệ phương trình mới sau khi biến đổi, nếu như ta dùng cách đại số trực tiếp, phân tích ra được một nghiệm x = 1 thì phương trình bậc cao còn lại khó mà giải được. Cách lập luận theo tính đơn điệu của hàm số thế này vừa tránh được điều đó vừa làm cho lời giải nhẹ nhàng hơn.

Bài 23 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z - w = 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 6 \\ x^3 - y^3 + z^3 - w^3 = 20 \\ x^4 - y^4 + z^4 - w^4 = 66 \end{cases} \quad \text{(China TST 2006)}$$

Giải

Đặt $\begin{cases} x + z = a \\ xz = b \\ y + w = c \\ yw = d \end{cases}$ ta có HPT: $\begin{cases} a - c = 2 \ (1) \\ a^2 - 2b - c^2 + 2d = 6 \ (2) \\ a^3 - 3ab - c^3 + 3cd = 20 \ (3) \\ a^4 - 4a^2b + 2b^2 - c^4 + 4c^2d - 2d^2 = 66 \ (4) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} c = a - 2 \\ d = -2a + b + 5 \end{cases}$$

Từ (3) và (4) có

$$\begin{cases} 5a - 2b - 14 = 0 \\ 5a^2 - 2ab - 10a - b - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 2b = 14 \\ 4a - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Thế ngược lại ta tìm được nghiệm $(x; y; w; z)$ của hệ là $(1; 0; 3; 2)$ và các hoán vị. □

Bài 24: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

Giải

Xét $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến x, viết lại là:

$$x^2 + x(y - 7) + y^2 - 6y + 14 = 0$$

Phương trình này có nghiệm khi:

$$\Delta_y = (y - 7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3}$$

Hoàn toàn tương tự, xem (*) là phương trình bậc hai theo biến y, viết lại là:

$$y^2 - y(x - 6) + (x^2 - 7x + 14) = 0$$

Phương trình này có nghiệm khi:

$$\Delta_x = (x - 6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 20 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$$

Ta xét hàm số: $f(t) = 2t^2 - 3t + 4 (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(t) = 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} < 1$.
Suy ra, trên $[1, +\infty)$, hàm số này đồng biến. Lại có $f(x) \geqslant f(2) = 6, f(y) \geqslant f(1) = 3 \Rightarrow f(x).f(y) \geqslant 3.6 = 18$.
Từ phương trình thứ nhất của hệ thì ta thấy đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = 2, y = 1$.
Thay hai giá trị này vào (*), ta thấy không thỏa.
Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm. □
⊛ Nhận xét: Ý tưởng giải của bài này không khó và cũng khá quen thuộc khi chỉ cần tìm miền xác định của biến thông qua việc tính Delta của một phương trình bậc hai; tuy trong lời giải trên có khảo sát hàm số nhưng thực ra các kết quả đó có thể chứng minh bằng bất đẳng thức đại số thuần túy nên công cụ giải chính của bài này là đại số. Và do đó việc hai biểu thức của x và y ở phương trình đầu của hệ giống nhau có thể dẫn đến đánh giá sai hướng mà dùng giải tích, xét hàm số để khai thác phương trình đầu tiên trong khi điều đó không đem lại kết quả gì. Các hệ số được chọn ra số rất đẹp chính là ưu điểm nổi bật của bài toán này.

Bài 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + y^4 + xy = 2xy^2 + 7 \ (1) \\ -x^2y + 4xy + xy^3 + 11(x - y^2) = 28 \ (2) \end{cases}$

Giải

Xét $(1).4 - (2) \Leftrightarrow x^2(y + 4) - x(y^3 + 8y^2 + 11) + 4y^4 + 11y^2 = 0$ $(*)$.
Nếu $y = -4$ ta có phương trình $-27x + 1200 = 0 \Leftrightarrow x = 16$. Thử lại thấy $(x; y) = (16 - 4)$

không thoả hệ.
Vậy $y \neq 4$. Khi đó, coi (*) là phương trình bậc 2 theo x, ta tìm được nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{y^3 + 8y^2 + 11 \pm \sqrt{(y^3 + 8y^2 + 11)^2 - 4(y+4)(4y^4 + 11y^2)}}{2(y+4)}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{y^3 + 8y^2 + 11 \pm (y^3 - 11)}{2(y+4)}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = y^2; x_2 = \frac{4y^2 + 11}{y+4}$$

Với $x = y^2$ thay vào (1) ta có $y^3 = 7 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{7} \implies x = \sqrt[3]{49}$. Với $x = \dfrac{4y^2+11}{y+4}$ thay vào phương trình đầu và rút gọn ta được

$$y^6 + 4y^4 - 6y^3 + 4y^2 - 12y + 9 = 0 \Leftrightarrow (y^3 + 2y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+y+3) = 0 \implies y = 1 \implies x = 3$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt[3]{49}; \sqrt[3]{7}), (3; 1)$ □

Bài 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ x^4 + 9y^4 = 10 \end{cases}$

Giải

Từ hệ phương trình ta có

$$(x^2 + 3y^2)^2 - (x^4 + 9y^4) = 6x^2y^2 = 6 \implies x^2y^2 = 1$$

⋇ Nếu $xy = 1$ ta có:

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4 + 2\sqrt{3} \implies x + y\sqrt{3} = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \pm(\sqrt{3} + 1)$$

Lại có:
$$y = \frac{1}{x} \implies x^2 \pm (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = \pm\sqrt{3}; y = \frac{1}{x}$$

⋇ Nếu $xy = -1$ ta có

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4 - 2\sqrt{3} \implies x + y\sqrt{3} = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \pm(\sqrt{3} - 1)$$

Lại có
$$y = -\frac{1}{x} \implies x^2 \pm (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = \pm\sqrt{3}; y = -\frac{1}{x}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ and $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\pm\sqrt{3}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ □

Bài 27: Giải hệ phương trình

$$(*) \quad (x+y)(z+1) = (x+z)(y+1) = (y+z)(x+1) = 2a(a+1)$$

(2012 Philippine Math Olympiad National Finals Oral Round)

Giải

Đặt $\begin{cases} x + yz = u \\ y + zx = v \\ z + xy = w \end{cases}$ ta có hệ phương trình

$$u + v = v + w = w + u = 2a(a + 1)$$

Hệ này có nghiệm $u = v = w = a(a + 1)$ do đó hệ (*) tương đương

$$x + yz = y + zx = z + xy = a(a + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y) = z(x - y) \\ (y - z) = x(y - z) \\ x + zx = a(a + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \vee z = 1 \\ y = z \vee x = 1 \\ x + yz = a(a + 1) \end{cases}$$

Tóm lại ta có sơ đồ sau:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} & \nearrow & y = z & \Longrightarrow & x = y = z & \in & \{a, -(a + 1)\} \\ x = y & & & & & & \\ & \searrow & x = 1 & \Longrightarrow & x = y = 1 & ; & z = a^2 + a - 1 \\ & & & & & & \\ & \nearrow & y = z & \Longrightarrow & y = z = 1 & ; & x = a^2 + a - 1 \\ z = 1 & & & & & & \\ & \searrow & x = 1 & \Longrightarrow & x = z = 1 & ; & y = a^2 + a - 1 \end{array}\right\|$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (a; a; a), (-a-1; -a-1; -a-1), (1; 1; a^2+a-1)$ và các hoán vị. □

Bài 28: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ xy = z^2 & (3) \end{cases}$$

a) Giải hệ trên với ẩn $(x; y)$.
b) Các số a, b phải thoả điều kiện gì để các nghiệm x, y, z của hệ dương và khác nhau?

Giải

Câu a) Bình phương 2 vế của (1): $a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
Để ý $x + y = a - z$, kết hợp (2) và (3) ta có:

$$a^2 = b^2 + 2z^2 + 2(a - z).z$$

hay

$$a^2 = b^2 + 2az$$

Từ đó:

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

Từ đây tìm được x, y bởi các hệ thức: $x + y = a - z = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$; $xy = z^2 = \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2}{4a} \pm \dfrac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a} \\ y = \dfrac{a^2 + b^2}{4a} \mp \dfrac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a} \end{cases}$$

Câu b) Để $x, y > 0$ thì $x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{2a} > 0 \Rightarrow a > 0$

Để $z > 0 \Rightarrow \dfrac{a^2 - b^2}{2a} > 0 \Rightarrow a > |b|$

Để $x \neq y$ cần có $10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0 \Leftrightarrow 1 > \dfrac{|b|}{a} > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a > |b| > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ $(*)$

(*) chính là điều kiện cần có. □

Bài 29: Giải hệ phương trình

$$(*) \begin{cases} uv^3 + vy^3 = 14 \\ ux^2 + vy^2 = 5 \\ ux + vy = 2 \\ u + v = 1 \end{cases}$$

Giải

Đặt $a_k = ux^k + vy^k$. Để ý rằng

$$a_{k+1} = (x + y)a_k - xya_{k-1}$$

Đặt $A = x + y; B = xy$. Lần lượt xét $k = 2, 3$ từ hệ (*) ta có:

$$\begin{cases} 5 = 2A - B \\ 14 = 5A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 3 \end{cases}$$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0$.Như vậy $(x; y) = (1; 3), (3; 1)$.
Thế vào hệ (*) ta có

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ (*) có nghiệm $(x; y; u; v) = \left(1; 3; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right), \left(3; 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ □

Bài 30: Giải hệ phương trình

$$a^2 + bc - ab = b^2 + ca - bc = c^2 + ab - ca$$

Giải

Với $c = 0$ ta tìm được nghiệm $(a; b; c) = (0; 0; 0)$

Với $c \neq 0$, nếu $(a; b; c)$ là nghiệm của hệ thì $\left(\dfrac{a}{c}; \dfrac{b}{c}; 1\right)$ cũng là nghiệm (do các phương trình là thuần nhất). Vậy không giảm tổng quát giả sử $c = 1$.

Khi đó ta có hệ phương trình

$$a^2 + b - ab = b^2 + a - b = 1 + ab - a$$

Từ $a^2 + b - ab = 1 + ab - a$, ta có$a^2 + a - 1 = b(2a - 1) \Rightarrow b = \dfrac{a^2 + a - 1}{2a - 1}$ (dễ thấy $a \neq \dfrac{1}{12}$)

Thay vào phương trình $a^2 + b - ab = b^2 + a - b$ ta có $(a - 1)(a^3 - 6a^2 + 5a - 1) = 0$

Nếu $a = 1$ ta có nghiệm $(a; b; c) = (1; 1; 1)$.

Trường hợp còn lại, a là nghiệm của $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$. Có thể giải phương trình này bằng cách đặt $t = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y + 2$ (xem cách giải tổng quát Phương trình bậc 3). Từ đó ta tìm được nghiệm

$$2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3} \text{ với } t = \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \text{ và } k = \overline{1, 2}$$

Như vậy hệ phương trình có nghiệm (c, c, c) với $c \in \mathbb{R}$ và

$$\left(c \times \left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3}\right), c \times f\left(2 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cos \frac{t + 2k\pi}{3}\right), c\right)$$

(trong đó $c \in \mathbb{R},\ t = \arccos \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},\ k = \overline{0, 2}$ và $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x - 1}$) $\square$

Hệ phương trình vô tỉ

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

Giải

Do nhẩm được nghiệm $x = y = 1$ nên ta sẽ giải bằng hàm số và chứng minh nó là nghiệm duy nhất của hệ.

Đặt $\begin{cases} x - 1 = a \\ y - 1 = b \end{cases}$, khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^b \\ b + \sqrt{b^2 + 1} = 3^a \end{cases}$$

Nhận thấy đây là hệ đối xứng theo 2 ẩn a và b, trừ vế theo vế ta có

$a + \sqrt{a^2 + 1} + 3^a = b + \sqrt{b^2 + 1} + 3^b$

Ta xét hàm số đặc trưng $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$ có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3$

Vì $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} \geqslant -t$ nên $f(t) > 0 \forall t$ Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $a = b$

Thay vào phương trình ta có $a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^a \Leftrightarrow \ln(\sqrt{a^2 + 1} + a) - a \ln 3 = 0$

Xét hàm số $G(a) = \ln(\sqrt{a^2 + 1} + a) - a \ln 3$

Ta có $G'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \ln 3 < 1 - \ln 3 < 0 \forall a \in \mathbb{R}$

Nên hàm số nghịch biến và ta nhận thấy $a = 0$ là nghiệm nên phương trình có duy nhất.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$ □

Bài 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi ĐH khối A - 2006)

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant -1, g \geqslant -1, xy \geqslant 0$
Đặt $t = \sqrt{xy} \geqslant 0$. Từ phương trình đầu ta có $x + y = 3 + t$ $(*)$
Bình phương hai vế của phương trình sau ta có

$$x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16 \ (**)$$

Thay (*) vào (**) ta được

$$3 + t + 2 + 2\sqrt{t^2 + 3 + t + 1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 t + 4} = 11 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 11 \\ 4(t^2 + t + 4) = (11 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x; y) = (3; 3)$ □

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + y + 3} = 2 \\ 2\sqrt{x+4} + 3\sqrt{y+8} = 13 \end{cases}$

Giải

ĐK: $x \geqslant 0; x^2 + y + 3 \geqslant 0; y + 8 \geqslant 0$
Từ phương trình (2) sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$13^2 = \left(2\sqrt{x+4} + 3\sqrt{y+8}\right)^2 \leqslant 13\left(x + 4 + y + 8\right) \Rightarrow x + y \geqslant 1 \ (*)$$

Từ phương trình (1), bình phương hai vế ta được:

$$x + x^2 + y + 3 + 2\sqrt{x\left(x^2 + y + 3\right)} = 4 \Leftrightarrow x + y = 1 - x^2 - 2\sqrt{x\left(x^2 + y + 3\right)} \Rightarrow x + y \leqslant 1 \ (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $x + y = 1$

Từ đó dấu bằng xảy ra ở các BĐT nên $\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{2} = \dfrac{\sqrt{y+8}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$ □

Bài 4: Giải hệ phương trình sau với $z \geqslant 0$:

$$(*)\begin{cases}(3-x)^{2003}=y+2\\ \log_3\dfrac{1}{2z-y}+\log_{\frac{1}{3}}(y+2)=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{9+4y}\\ \log_2\left(x^2+z^2\right)=2+\log_2 x\end{cases}$$

Giải

ĐK: $x>0;\ 2z>y;\ y>-2$

Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)^{2003}=y+2\\ -\log_3(2z-y)-\log_3(y+2)=-\log_3(9+4y)\\ \log_2\left(x^2+z^2\right)=\log_2 4x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)^{2003}=y+2\\ (2z-y).(y+2)=9+4y\\ x^2+z^2=4x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)^{2003}=y+2\\ y^2+9+z^2+6y-2yz-6z=z^2-2z\\ x^2-4x+4=4-z^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)^{2003}=y+2\,(1)\\ (y+3-z)^2=z^2-2z\,(2)\\ (x-2)^2=4-z^2\,(3)\end{cases}$$

Nếu (x_0,y_0,z_0) là nghiệm của hệ ta có:

$(x_0-2)^2=4-{z_0}^2\Rightarrow 4-{z_0}^2\geqslant 0\Leftrightarrow -2\leqslant z_0\leqslant 2\,(4)$

$(y_0+3-z_0)^2={z_0}^2-2z_0\Rightarrow {z_0}^2-2z_0\geqslant 0\Leftrightarrow z_0\leqslant 0\vee z_0\geqslant 2\,(5)$

Kết hợp với điều kiện bài toán là $z_0\geqslant 0$với (4) và (5) ta có: $z_0=0\vee z_0=2$

⋇ Với $z_0=0$ từ (2) và (3) ta có $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=4\\ y_0=-3\end{cases}$ không thỏa điều kiện bài toán

⋇ Với $z_0=2$ từ (2) và (3) ta có$\begin{cases}x_0=2\\ y_0=-1\end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y;z)=(2;-1;2)$ □

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2\\ y(\sqrt{x^2+1}-1)=\sqrt{3x^2+3}\end{cases}$

Giải

Điều kiện xác định: $x>0, y\neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{x}}{y}+2\Leftrightarrow y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy\Leftrightarrow y^2+y(\sqrt{x}-2x)-2x\sqrt{x}=0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo biến y, ta có:

$$\Delta_x = (\sqrt{x} - 2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x} + 2x)^2 > 0$$

Do đó, phương trình này có hai nghiệm là:
$y_1 = \dfrac{(2x - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 2x)}{2} = -\sqrt{x}, y_2 = \dfrac{(2x - \sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 2x)}{2} = 2x,$
Xét hai trường hợp:
⁎ Nếu $y = -\sqrt{x}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$-\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1} - 1) = \sqrt{3x^2+3}$$

Dễ thấy: $-\sqrt{x}(\sqrt{x^2+1} - 1) < 0 < \sqrt{3x^2+3}$ nên phương trình này vô nghiệm.
⁎ Nếu $y = 2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2x(\sqrt{x^2+1} - 1) = \sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.(2x - \sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2x - \sqrt{3}} \; (*)$$

(dễ thấy $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ không thỏa mãn đẳng thức nên chỉ xét $x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và phép biến đổi trên là phù hợp).
Xét hai hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2+1}, x > 0$ và $g(x) = \dfrac{2x}{2x - \sqrt{3}}, x > 0$.
Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên là hàm đồng biến, $g'(x) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{(2x - \sqrt{3})^2} < 0$ nên là hàm nghịch biến. Suy ra phương trình (*) có không quá một nghiệm.
Nhẩm thấy $x = \sqrt{3}$ thỏa mãn (*) nên đây cũng chính là nghiệm duy nhất của (*).
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ □.
⊛ Nhận xét: Quan hệ của x và y được che giấu ngay trong phương trình đầu tiên, nếu nhận thấy điều đó thì các bước tiếp theo sẽ rất dễ nhận biết.

Bài 6: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} + x^4\left(1 - 2x^2\right) = y^2 \\ 1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} = x^3\left(x^3 - x + 2y^2\right) \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} \sqrt{4 - (1 - x^2y)^2} = 2x^6 - x^4 + y^2 \\ -\sqrt{1 + (x-y)^2} = 1 - x^6 + x^4 - 2x^3y^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ trên ta được:

$$\sqrt{4 - (1 - x^2y)^2} - \sqrt{1 + (x-y)^2} = x^6 - 2x^3y + y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - (1 - x^2y)^2} = \sqrt{1 + (x-y)^2} + \left(x^3 - y\right)^2 + 1 \; (**)$$

Ta thấy:

$$\begin{cases} VT(*) \leqslant 2 \\ VP(*) \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow VP(*) = VT(*) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Thế $x = y = 1$ vào hệ thấy thỏa mãn.Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$ □

Bài 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = 4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)-1} & (1) \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3} & (2) \end{cases}$$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x > 0 \\ y \geqslant -3; y \neq 0 \\ \left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y) \geqslant 0 \\ (x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)} \geqslant 0 \end{cases}$

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow 2\frac{x}{y}+4\frac{y}{x} = 4\sqrt{2\frac{x}{y}-3\frac{y}{x}-1}-1 \ (3)$$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t \ (t \neq 0)$, phương trình (3) trở thành:

$$2t+\frac{4}{t}+1 = 4\sqrt{2t-\frac{3}{t}-1}$$

Lại có:

$$(4) \Rightarrow 4t^2+\frac{16}{t^2}+1+16+\frac{8}{t}+4t = 32t-\frac{48}{t}-16$$

$$\Leftrightarrow 4t^2+\frac{16}{t^2}-28t+\frac{56}{t}+33 = 0 \Leftrightarrow 4\left(t^2+\frac{4}{t^2}\right)-28\left(t-\frac{2}{t}\right)+33 = 0 \ (5)$$

Đặt $t-\dfrac{2}{t} = u$, phương trình (4) trở thành:

$$4\left(u^2+4\right)-28u+33 = 0 \Leftrightarrow 4u^2-28u+49 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{2}{t} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2t^2-7t-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Lấy hai giá trị của t vừa tìm được thay vào phương trình (4) thì $t = 4$ thỏa mãn.Suy ra $x = 4y$
Biến đổi phương trình (2) kết hợp với hệ quả biến đổi của phương trình (1) là $x = 4y$ ta được:

$$\begin{aligned} &(2) \Leftrightarrow (x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)} = x+y+2\sqrt{x(y+3)} \\ &\Leftrightarrow x^2+xy+3x-2x\sqrt{x(y+3)}+x+y+3-\sqrt{x(y+3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left[x+y+3-2\sqrt{x(y+3)}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{(chọn)} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 1)$ □

Bài 8: (THTT T8/415) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2 x = 2^{y+2} \ (1) \\ 4\sqrt{1+x} + xy\sqrt{4+y^2} = 0 \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $x > 0$. Từ (2) suy ra $y < 0$ vì nếu $y \geqslant 0 \Rightarrow VT(2) > 0$.
Ta biến đổi phương trình (2):

$$\begin{aligned} &(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{1+x} = -xy\sqrt{4+y^2} > 0 \Leftrightarrow 16(1+x) = x^2y^2(4+y^2) \\ &\Leftrightarrow 4x^2y^2 - 16x + x^2y^4 - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (xy^2 - 4)(4x + xy^4 + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow xy^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{y^2} \ (3) \end{aligned}$$

Thay (3) vào (1) ta được $\log_2 \frac{4}{y^2} = 2^{y+2} \Leftrightarrow 4.2^y + 2\log_2(-y) - 2 = 0$ (5) (do $y < 0$)
Nhận thấy $y = -1$ là nghiệm của (5). Xét $f(y) = 4.2^y + 2\log_2(-y) - 2$ có $f'(y) = 4.2^y.\ln 2 + \frac{2}{-y\ln 2} > 0 \ \forall y < 0$
Do đó hàm số $f(y)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Vậy (5) có nghiệm duy nhất $y = -1$. Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x; y) = (4; -1)$ □.

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{35}{12} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$

Giải

Đặt $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = a$ và $\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = b$.
Cộng hai phương trình vế theo vế ta có

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + b = \frac{7}{2} \ (1)$$

Trừ hai phương trình vế theo vế ta có:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{7}{3} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = \frac{7}{3} \ (2)$$

Từ đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{7}{2} \\ a + \dfrac{1}{b} = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2ab = 7b \\ 3ab + 3 = 7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 7a + 2 = 0 \\ b = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, b = 3 \\ a = \dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x; y) = (\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}), (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ □

Bài 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \ (1) \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+5} = 6 \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x, y \geqslant 0$
Cộng hai phương trình ta có $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}+\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}=10$
Trừ (2) cho (1) ta có $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}+\sqrt{2y+5}-\sqrt{2y}=2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}+\dfrac{2}{\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}}=2$ Đặt $a=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}, b=\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{5}{b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=5$$

Ta cần giải phương trình $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5 \Leftrightarrow x=2$ (chọn). Tương tự có $y=2$
Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;2)$ □

Bài 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}=1 \ (1) \\ y^2+x+2y\sqrt{x}-y^2x=0 \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 0; \ x-y-1 \geqslant 0$
Từ (1) ta có:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-y-1}+1 \Leftrightarrow x=x-y-1+2\sqrt{x-y-1}+1 \Leftrightarrow y=2\sqrt{x-y-1}$$

$$\Leftrightarrow y^2=4(x-y-1) \Leftrightarrow (y+2)^2=4x \Leftrightarrow y+2=2\sqrt{x}$$

Từ (2) ta có:

$$(y+\sqrt{x})^2=xy^2 \Leftrightarrow y+\sqrt{x}=y\sqrt{x}$$

Ta được hệ mới là

$$\begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ y+\sqrt{x}=y\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1; \ x=\dfrac{1}{4} \\ y=2; x=4 \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(\dfrac{1}{4};-1),(2;4)$ □

Bài 12: Tìm a để hệ sau có nghiệm thực x, y, z:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1 \end{cases}$$

Giải

ĐKXĐ: $x \geqslant 1, \ y \geqslant 1, \ z \geqslant 1$
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\sqrt{y+1}\right)+\left(\sqrt{z-1}+\sqrt{z+1}\right)=2a \\ \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}\right)+\left(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}\right)=2 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}; v = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1}; s = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$
Do $x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1$ nên $u \geqslant \sqrt{2},\ v \geqslant \sqrt{2},\ s \geqslant \sqrt{2}$. Ngược lại nếu $u \geqslant \sqrt{2},\ v \geqslant \sqrt{2},\ s \geqslant \sqrt{2}$, ta có

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{u} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{4}\left(u^2 + \frac{4}{u^2}\right) \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1$$

Tương tự với y, z. Vậy ta cần tìm a để hệ sau có nghiệm $u \geqslant \sqrt{2},\ v \geqslant \sqrt{2},\ s \geqslant \sqrt{2}$:

$$(*) \begin{cases} u + v + s = 2a \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{s} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

⁎ Điều kiện cần: Giả sử hệ (*) có nghiệm. Theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$$2a = (u + v + s)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{s}\right) \geqslant 9 \Rightarrow a \geqslant \frac{9}{2}$$

⁎ Điều kiện đủ: Giả sử $a \geqslant \dfrac{9}{2}$. Ta chứng minh hệ (*) có nghiệm.
Lấy $s = 3$ (thoả $s \geqslant \sqrt{2}$) . Khi đó (*) trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2a - 3 \\ u.v = \dfrac{3(2a-3)}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u,\ v$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - 2(2a-3)t + \dfrac{3(2a-3)}{2}$
$\Rightarrow u,\ v = \dfrac{2a - 3 \pm \sqrt{(2a-3)(2a-9)}}{2}$
Đặt $h = 2a - 9 \geqslant 0 \Rightarrow \left(h + 6 - 2\sqrt{2}\right)^2 > (h+3)^2 > h(h+6)$.
Tức là $(2a-3) - 2\sqrt{2} > \sqrt{(2a-3)(2a-9)} \Rightarrow u > \sqrt{2},\ v > \sqrt{2}$.
Như vậy hệ phương trình có nghiệm $u \geqslant \sqrt{2},\ v \geqslant \sqrt{2},\ s \geqslant \sqrt{2}$.
Tóm lại $a \geqslant \dfrac{9}{2}$ là giá trị cần tìm □

Bài 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x+y}\right) = 1 \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x, y \geqslant 0$
Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì hệ vô nghiệm. Xét $x, y > 0$.
Đặt $u = \sqrt{x}; v = \sqrt{y}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{u}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right) = 2 \\ \sqrt{v}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{u}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2u+v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{v}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2u+v}{u^2+v^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{v}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{v}} = \dfrac{4u+2v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

Nhân hai phương trình ta được

$$\frac{4}{u} - \frac{1}{v} = \frac{2u+v}{u^2+v^2} \Leftrightarrow (4v-u)(u^2+v^2) = (2u+v).uv \Leftrightarrow (2v-u)(u^2+2v^2) = 0 \Leftrightarrow u = 2v$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x;y) = (64(17+12\sqrt{2}); 16(17+12\sqrt{2}))$ □

Bài 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{5x+7\sqrt{5}y}{x^2+y^2} = 7 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x-5y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Giải

⋇ $x = 0 :\Rightarrow y = \sqrt{5}$
⋇ $y = 0$: vô nghiệm
⋇ $x, y \neq 0$:

Nhân (1) cho x và (2) cho y ta có: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{5x^2+7\sqrt{5}xy}{x^2+y^2} = 7x \\ y^2 + \dfrac{7\sqrt{5}xy-5y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Trừ 2 phương trình vế theo vế ta được $x^2 - y^2 + 5 = 7x$ $(*)$

Nhân (1) cho y và (2) cho x ta có: $\begin{cases} xy + \dfrac{5xy+7\sqrt{5}y^2}{x^2+y^2} = 7y \\ xy + \dfrac{7\sqrt{5}x^2-5xy}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Cộng 2 phương trình vế theo vế được: $2xy + 7\sqrt{5} = 7y$ $(**)$

Từ (*) và (**) ta có HPT: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 5 = 7x \ (3) \\ 2xy + 7\sqrt{5} = 7y \ (4) \end{cases}$

Ta có: $(4) \Leftrightarrow y(7-2x) = 7\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} 7 - 2x \neq 0 \\ y = \dfrac{7\sqrt{5}}{7-2x} \end{cases}$

Thế vào (3) ta có phương trình

$$x^2 - \frac{245}{(7-2x)^2} + 5 = 7x \Leftrightarrow \frac{x(4x^3 - 28x^2 + 69x - 140)}{(2x-7)^2} = 7x \Leftrightarrow x = 7 \text{ (do } x \neq 0) \Rightarrow y = -\sqrt{5}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $(x;y) = (0;\sqrt{5}), (7;-\sqrt{5})$ □

Bài 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} \ (1) \\ \sqrt{x^2-16} = 2 + \sqrt{y-3x} \ (2) \end{cases}$

Giải

Xét (1) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x^2-y} = 4x - y \Leftrightarrow y - 2x = 2\sqrt{x^2-y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ (loại)} \\ y = 4x - 4 \end{array}\right.$$

Thay $y = 4x - 4$ vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2-16} = 2 + \sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16} - 3 = \sqrt{x-4} - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-16}+3} = \frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1} \Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{x-5}{\sqrt{x^2-16}+3} - \frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right) = 0 \ (*)$$

Do $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3} \geqslant \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2}+3} > 1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1}$ nên $(*) \Leftrightarrow x=5 \Leftrightarrow y=16$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(5;16)$ □

Bài 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+2x^3-5x^2+y^2-6x-11=0 \ (1) \\ x^2+x=\dfrac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}} \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $y^2-7>0$

Xét (1) ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^2(x^2+x)+x(x^2+x)-6(x^2+x)+y^2-7-4=0 \Leftrightarrow (x^2+x-6)(x^2+x)+(y^2-7)=4$

Đặt $a=x^2+x;\ b=\sqrt{y^2-7}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(a-6)+b^2=4 \\ a=\dfrac{3b-6}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0;b=2 \\ a=1;b=3 \\ a=5;b=-3 \text{ (loại)} \\ a=6;b=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)=(-1;\pm\sqrt{11}),(0;\pm\sqrt{11}),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\pm 4\right),\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\pm 4\right)$ □

Bài 17: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} \ (1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \ (2) \end{cases}$

Giải

Ta có điều kiện $x \geqslant 0, y \geqslant 3$

⋇ Nếu $y=3$: thay vào (2) ta có $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=x+3$ (vô nghiệm)

⋇ Nếu $y>3$:

Xét (1) ta có:

$$\begin{aligned} &(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\frac{x+y-(x+3)}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+y-(x+3))}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\frac{x+y-(x+3)}{x} \\ &\Leftrightarrow (y-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}-\frac{1}{x}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \end{aligned}$$

Từ đây ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình ta được $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = 8$
Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 8)$ □

Bài 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x + y \geqslant 0$ và $3x - y \geqslant 0$

Đặt: $\begin{cases} \sqrt{3x-y} = a \\ \sqrt{x+y} = b \end{cases}$ $(a, b \geqslant 0) \Rightarrow \dfrac{a^2 - b^2}{2} = x - y$ Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{(a^2-b^2)^4}{16} = \dfrac{13(a^2+b^2)}{4} - 4(1) \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

Phương trình (1) tương đương:

$$\frac{(a-b)^4.(a+b)^4}{16} = \frac{13(a^2+b^2)}{4} - 4$$

Thế $a + b = \sqrt{2}$ vào phương trình trên

$$\Rightarrow (a-b)^4 = 13(a^2+b^2) - 16(2)$$

Với ý tưởng đưa (2) về một phương trình đẳng cấp, ta sẽ viết lại (2) thành:

$$(a-b)^4 = \frac{13}{2}(a^2+b^2).2 - 4.4$$

Từ $a + b = \sqrt{2} \Rightarrow (a+b)^2 = 2$ và $(a+b)^4 = 4$. Thế vào phương trình trên:

$$\Rightarrow (a-b)^4 = \frac{13}{2}.(a^2+b^2)(a+b)^2 - 4(a+b)^4$$

$$\Rightarrow 3a^4 + 2a^3b - 34(ab)^2 + 2ab^3 + 3b^4 = 0(3)$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow 3a^4 = 0 \Rightarrow a = 0$ mà $a + b = \sqrt{2} \Rightarrow b \neq 0$ Chia 2 vế của (3) cho b^4:

$$(3) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 34\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b} + 3 = 0$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b}(t \geqslant 0)$. Phương trình trên trở thành:

$$3t^4 + 2t^3 - 34t^2 + 2t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(3t-1)(t^2+4t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \quad (t^2 + 4t + 1 > 0 \forall t \geqslant 0)$$

Nếu $t = 3 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 3$ kết hợp với $a + b = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = \dfrac{9}{8} \\ x + y = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{16} \\ y = \dfrac{-3}{16} \end{cases}$$

Nếu $t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$ kết hợp với $a + b = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = \dfrac{1}{8} \\ x + y = \dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{16} \\ y = \dfrac{13}{16} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{5}{16}; \dfrac{-3}{16}\right), \left(\dfrac{5}{16}; \dfrac{3}{16}\right)$. □

Bài 19: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} - y^2 = 2\sqrt{2} \ (1) \\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2}y = 8 + \sqrt{2} \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x \in [0; 6]$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x} + \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} = \left(y - \sqrt{2}\right)^2 + 6 + 3\sqrt{2} \ (3)$$

Lại có: $VT(3) = 1.\sqrt{2x} + \sqrt{2}.\sqrt{12 - 2x} + 1.\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2}.\sqrt[4]{24 - 4x}$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz cho $VT(3)$ ta được

$$VT(3) \leqslant \sqrt{3.(2x + 12 - 2x)} + \sqrt{3\left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right)} \leqslant 6 + \sqrt{3.6} = 6 + 3\sqrt{2} \ (*)$$

Dễ dàng nhận thấy $VP(3) \geqslant 6 + 3\sqrt{2} \ (**)$ Từ (*), (**) và (3) suy ra

$$VT(3) = VP(3) = 6 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x} = \sqrt{6-x} \\ \sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{6-x} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 6)$ □

Bài 20: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y}.\sqrt[3]{x - y} = y \\ 2(x^2 + y^2) = 11 + 3\sqrt{2x - 1} \end{cases}$

Giải

Ta thấy $2x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$.

Trong phương trình thứ nhất, $x - y$ và y cùng dấu. Nếu $y \geqslant x$ thì $y > 0$ và $x - y \leqslant 0$, mâu thuẫn.

Do đó, $x > y > 0$.

Đặt $\sqrt[3]{x - y} = a > 0 \Rightarrow x - y = a^3$.

Ta có $(x^2 - x - y)a^2 = y^2$. Thay $y = x - a^3$, ta được:

$$(x^2 - 2x + a^3)a^2 = (x - a^3)^2$$

Đẳng thức này tương đương với:

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^5 = x^2 - 2a^3x + a^6$$

Rõ ràng $a = 1$ thì đẳng thức đúng nên khi phân tích thành nhân tử, ta được:

$$(a-1)(x^2+2a^2x+ax-a^5)=0$$

Dễ thấy rằng $x^2+2a^2x+ax-a^5$ không thể xảy ra vì $a^5 \leqslant \max\{a^3, a^6\} = \max\{x-y, (x-y)^2\}$.
⁎ Nếu $\max\{x-y, (x-y)^2\} = (x-y)^2$ thì dễ thấy $a^5 \leqslant (x-y)^2 < x^2 < x^2+2a^2x+ax$.
⁎ Nếu $\max\{x-y, (x-y)^2\} = x-y$ thì dễ thấy $a^5 \leqslant x-y$, suy ra $0 < x-y \leqslant 1$ và từ PT thứ hai, với $x^2+y^2 \geqslant \dfrac{11}{2}$. Nếu $x \leqslant 1$ thì $x^2+y^2 \leqslant 2$, mâu thuẫn. Suy ra $x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 > x-y$.
Trong cả hai trường hợp, ta đều có $x^2+2a^2x+ax-a^5 > 0$.
Vậy $a = 1 \Rightarrow y = x-1$, thay vào phương trình thứ hai, ta được:

$$2(2x^2-2x+1) = 11+3\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-1)^2-10 = 3\sqrt{2x-1}$$

Đặt $\sqrt{2x-1} = b \geqslant 0$ thì ta được phương trình sau:

$$b^4-10 = 3b \Leftrightarrow (b-2)(b^3+2b^2+4b+5) = 0$$

Dễ thấy PT này có nghiệm không âm duy nhất là $b = 2$, tương ứng với nghiệm của hệ đã cho là $(x,y) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ □

Bài 21: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2+2 = \sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2} = \sqrt{y^3+8y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant 2, y^2(y+3) \geqslant 0, y(y+8) \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 0$.
Phương trình thứ nhất viết lại là:

$$x^3-3x^2+2 = y\sqrt{y+3}$$

Đặt $x-1 = a \geqslant 1, \sqrt{y+3} = b \geqslant \sqrt{3}$, ta có:

$$a^3-3a = b^3-3b \Leftrightarrow (a-b)(a^2+b^2+ab-3) = 0$$

Dễ thấy $a^2+b^2+ab \geqslant 1+3+\sqrt{3} > 3$ nên ta được $a = b$ hay

$$a = \sqrt{y+3} \Rightarrow y = a^2-3$$

Bình phương hai vế của PT thứ hai, ta được: $9(x-2) = y^2+8y$ hay $9(a-1) = (a^2-3)(a^2+5)$
Đoán nghiệm là $a = 2$ và phân tích thành nhân tử, ta được:

$$(a-2)(a^3+2a^2+6a+3) = 0$$

Suy ra phương trình trên có nghiệm duy nhất là $a = 2$ tương ứng với nghiệm của hệ là $(x,y) = (3,1)$.
Thử lại ta thấy thỏa.Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x,y) = (3,1)$ □

Bài 22: Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} \sqrt{x+3} = y^3-6 \\ \sqrt{y+2} = z^3-25 \\ \sqrt{z+1} = x^3+1 \end{cases}$

Giải

Đặt $a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{y+2}, c = \sqrt{z+1}\,(a,b,c \geqslant 0)$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(b^2-2\right)^3 - 6 \\ b = \left(c^2-1\right)^3 - 25 \\ c = \left(a^2-3\right)^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = \left(b^2-2\right)^3 - b - 6 = f(b) \\ b - c = \left(c^2-1\right)^3 - c - 25 = g(c) \\ c - a = \left(a^2-3\right)^3 - a + 1 = h(a) \end{cases}$$

Lại có:

$$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(b^2-2\right)^3 \geqslant 6 > 1^3 \\ \left(c^2-1\right)^3 \geqslant 25 > 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > \sqrt{3} \\ c > \sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\left(a^2-3\right)^3 + 1 > \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{3} \\ a^2 - 3 > \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} > \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \end{cases} (*)$$

Ta có:

$$\begin{cases} f'(b) = 3\left(b^2-2\right)^2.2b - 1 > 3.1.2\sqrt{3} - 1 > 0\ \forall b > \sqrt{3} \\ g'(c) = 3\left(c^2-1\right)^2.2c - 1 > 3.2^2.2\sqrt{3} - 1 > 0\ \forall c > \sqrt{3} \\ h'(a) = 3\left(a^2-3\right)^2.2a - 1 > 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.2\sqrt{3} - 1 > 3.\dfrac{1}{2}.2\sqrt{3} - 1 > 0\quad \forall a(*) \end{cases}$$

Suy ra: $f(b), g(c), h(a)$ là hàm đồng biến và $f(2) = g(2) = h(2) = 0$.

⋇ Nếu $a > 2$:

$\Rightarrow h(a) > h(2) = 0 \Rightarrow c > a > 2 \Rightarrow g(c) > g(2) = 0 \Rightarrow b > c > 2$

$\Rightarrow f(b) > f(2) = 0 \Rightarrow a > b > 2 \Rightarrow a > b > c > a$

Vậy trường hợp này loại. Lý luận tương tự với $a < 2$.

Vậy ta có:

$$a = 2 \Rightarrow c = a + h(a) = 2 \Rightarrow b = c + g(c) = 2$$

$$a = b = c = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{y+2} = 2 \\ \sqrt{z+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ □

⊛ Nhận xét: Nếu có thể đoán nghiệm của hệ, ta cũng có lời giải đẹp như sau:

Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 = y^3 - 8 \\ \sqrt{y+2} - 2 = z^3 - 27 \\ \sqrt{z+1} - 2 = x^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = (y-2)(y^2+2y+4) \\ \dfrac{y-2}{\sqrt{y+2}+2} = (z-3)(z^2+3z+9) \\ \dfrac{z-3}{\sqrt{z+1}+2} = (x-1)(x^2+x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = (y-2)(y^2+2y+4)(\sqrt{x+3}+2)\ (1) \\ y - 2 = (z-3)(z^2+3z+9)(\sqrt{y+2}+2)\ (2) \\ z - 3 = (x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{z+1}+2)\ (3) \end{cases}$$

⁎ Nếu $x \neq 1 :\Rightarrow y \neq 2, z \neq 3$

Từ hệ trên ta có: $\begin{cases} (1) \Rightarrow |x-1| > |y-2| \\ (2) \Rightarrow |y-2| > |z-3| \\ (3) \Rightarrow |z-3| > |x-1| \end{cases}$ (mâu thuẫn)

Vậy $x = 1 \Rightarrow y = 2, z = 3$

Bài 23: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}$

Giải

Nnhận thấy ở phương trình thứ nhất của hệ có hệ số bậc nhất của $x; y$ tỉ lệ với nhau nên ta thêm bớt để đưa về đồng hệ số.

Từ phương trình thứ nhất ta có $2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(2x+2y) - \frac{3}{2}\sqrt{xy} = \frac{9}{2}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x+1} = a \\ \sqrt{3y+1} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2-1}{3} \\ y = \dfrac{b^2-1}{3} \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} (3x+1) + (3y+1) - \frac{3}{2}\sqrt{xy} = \frac{13}{2} \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}$

Thay $a; b$ vào hệ ta có

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)} = \frac{13}{2} \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = a + b \\ P = ab \end{cases}$ và thế (2) vào (1) ta có

$$\sqrt{P^2 + 2P - 15} = 19 - 4P \text{ (với } P \leqslant \frac{19}{4})$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 154P + 376 = 0 \Leftrightarrow P = 4 \vee P = \frac{94}{15} \text{ (loại) } \Rightarrow S = P = 4$$

Vậy a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow a = b = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = 2 \\ \sqrt{3y+1} = 2 \end{cases}$

Giải hệ này ta thu được $(x; y) = (1; 1)$ □

⊛ Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta vẫn có thể làm như sau: Nhân phương trình thứ nhất cho 2, nhân phương trình thứ hai cho 4, và trừ vế theo vế ta sẽ đưa được về dạng tổng các bình phương không âm $A^2 + B^2 + C^2 = 0$.

Bài 24: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y^2 + 2y(x+1) + 1 = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y - x) = 3 - 3y \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $x^2+2y+1 \geqslant 0$

Từ hệ ta có

$$\begin{aligned} & 4y^2 - 4y\sqrt{x^2+2y+1} + x^2 + 2y + 1 = y^2 - 2xy + x^2 \\ & \Leftrightarrow (2y - \sqrt{x^2+2y+1})^2 = (x-y)^2 \end{aligned}$$

⁕ Nếu $2y - \sqrt{x^2+2y+1} = x - y \Leftrightarrow 3y - x = \sqrt{x^2+2y+1}$:

Ta có hệ $\begin{cases} 3y - x \geqslant 0 \\ 9y^2 - 6xy - 2y = 1 \ (1) \\ y^2 - xy + 3y = 3 \ (2) \end{cases}$

Xét (1) − (2).6 ta có $3y^2 - 20y + 17 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{17}{3} \vee y = 1$

Với $y = 1$ thì $x = 1$ (chọn). Với $y = \dfrac{17}{3}$ thì $x = \dfrac{415}{51}$ (chọn)

⁕ Nếu $2y - \sqrt{x^2+2y+1} = y - x \Leftrightarrow y + x = \sqrt{x^2+2y+1}$:

Ta có hệ $\begin{cases} x + y \geqslant 0 \\ y^2 + 2xy - 2y = 1 \\ y^2 - xy + 3y = 3 \end{cases}$

Giải tương tự, ta có hệ trên vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đầu có nghiệm $(x;y) = (1;1), \left(\dfrac{415}{51}; \dfrac{17}{3}\right)$. □

Bài 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \ (1) \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \ (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geqslant y \geqslant 0$

Từ phương trình (2) ta có $\sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2y}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y}} = \frac{2y-x}{\sqrt{2y}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{2y}+\sqrt{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y}} + \sqrt{2y} + \sqrt{x}\right) = 0$$

Với $x = 2y$ thay vào (1) ta có $3^{4y} - 5.6^{2y} + 4.2^{4y} = 0 \Leftrightarrow 9^{2y} - 5.6^{2y} + 4.4^{2y} = 0$

Chia 2 vế của phương trình cho 9^{2y} và đặt $a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y}$ $(0 < a < 1)$ ta có:

$\Leftrightarrow 4a^2 - 5a + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{4} \\ a = 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy ta có $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}} 4 \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 4$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = \left(\log_{\frac{3}{2}} 4; \dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}} 4\right)$ □

Bài 26: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} & (1) \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4\sqrt[3]{x\left(3x^2 + 3y^2 - 1\right)} & (2) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển TP HCM 2009-2010)

Giải

Xét $y = 0$, thay vào hệ tìm được $x = \dfrac{-8}{13}$
Xét $x = 0$ từ (1) suy ra $y = 0$ nhưng $(x; y) = 0$ không thoả (2).
Xét $xy \neq 0$. Từ phương trình (1) ta có

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y$$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t$ ta có $f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow x = y^2 > 0$$

Khi đó (2) trở thành:

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(3x^2 + 3x - 1)} \Leftrightarrow 7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \text{ với } t = \frac{1}{x} > 0 \ (3)$$

Phương trình này có thể giải bằng phương pháp dùng hàm số đơn điệu (xem chương Các phương pháp giải phương trình). Lời giải cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow (2t+1)^3 + 2(2t+1) = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \\ &\Leftrightarrow g(2t+1) = g(\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}) \text{ với } g(t) = t^3 + 2t \end{aligned}$$

Do $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0\ \forall t > 0$ nên ta suy ra

$$2t + 1 = \sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow (2t+1)^3 = 3 + 3t - t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{-5 - \sqrt{89}}{16} \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{\sqrt{89} - 5}{16} \text{ (chọni)} \end{array}\right.$$

Suy ra $x = \dfrac{16}{\sqrt{89} - 5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}}$
Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{-8}{13}; 0\right), \left(\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}; \pm\sqrt{\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}}\right)$ □

Bài 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1 + 4^{x-y})5^{1-x+y} = 1 + 3^{x-y+2} \\ x^2 - 3y\sqrt{y - \dfrac{1}{x}} = 1 - 2y \end{cases}$

Giải

ĐK:$y \geqslant x \geqslant 0$ hoặc $y \leqslant x \leqslant 0$
Đặt $x-y=u$. Phương trình thứ nhất trở thành:

$$(1+4^u)5^{1-u}=1+9.3^u \ (1)$$

⁎ Nếu $u>0$ thì $VT<5+5=10$ còn $VP>1+9=10$ (VN)
⁎ Nếu $u<0$ thì $VT>5+5=10$ còn $VP<1+9=10$ (VN)
⁎ Nếu $u=0$ thì $x=y$
Thay vào phương trình sau ta có:

$$x^2-3x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1-2x \text{ (ĐK: } x\geqslant 1 \text{ hoặc } -1\leqslant x<0)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-3\sqrt{x(x^2-1)}=1-2x \ (*)$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-1}(a>0), b=\sqrt{x}$ thì (*) trở thành:

$$a^2-3ab+2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ \\ a=2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}=\sqrt{x} \\ \\ \sqrt{x^2-1}=2\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=2\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $x=y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ và $x=y=2\pm\sqrt{5}$ □

Bài 28: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 \ (1) \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐK: $x,y\geqslant 2$
Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2-\sqrt{x-2}-x^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}=\frac{y-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+(y^2-x^2) \\ &\Leftrightarrow (x-y)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+y\Big)=0 \\ &\Leftrightarrow x=y \end{aligned}$$

Thay vào hệ ban đầu ta được:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}-10=\sqrt{x-2}-1+(x^2-9) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+(x+3) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Dễ thấy $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} < x+3 \Rightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} < x+3+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}$
Do đó $x=3$ (thoả $x \geqslant 2$). Vậy hệ có nghiệm $x=y=3$ □

Bài 29: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^4y^4-(x^2+y^2)+1} = 1-xy \ (1) \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} = \sqrt{2} \ (2) \end{cases}$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} -1 \leqslant x, y \leqslant 1 \\ x^4y^4-(x^2+y^2)+1 \geqslant 0 \end{cases}$

Đặt $a = x^2+y^2; b = xy \Rightarrow \begin{cases} a \geqslant 2b \\ -1 \leqslant b \leqslant 1 \end{cases}$

Từ (1) ta có: $\sqrt{b^4-a+1} = 1-b \Leftrightarrow b^4-a+1 = b^2-2b+1 \Leftrightarrow a = b^4-b^2+2b$

Lại có $a \geqslant 2b \Rightarrow b^4-b^2+2b \geqslant 2b \Leftrightarrow b^2(b^2-1) \geqslant 0$ (∗) Do $b \in [-1;1] \Rightarrow b^2(b^2-1) \leqslant 0$ nên

(∗) $\Leftrightarrow b^2(b^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b \in \{0; \pm 1\} \end{cases}$ Từ $a = 2b \Rightarrow x = y$. Vậy ta có:

⋇ Nếu $b = 0 \Rightarrow x = y = 0$ (thoả (2)).
⋇ Nếu $b = 1 \Rightarrow x = y = 1$ (không thỏa (2)).
⋇ Nếu $b = -1 \Rightarrow x^2 = -1$ (vô nghiệm).
Kết luận: Hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$ □

Bài 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2xy}{x+y}+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \dfrac{2\sqrt{xy}+x+y}{2} \ (1) \\ 2012^{x+y-1}-3x+y+1 = \sqrt{(2x-1)^2+x-y+1} \ (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $xy \geqslant 0$
Phương trình (1) viết lại:

$$\frac{2xy}{x+y}-\frac{x+y}{2}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow \frac{4xy-(x+y)^2}{2(x+y)}+\frac{\dfrac{x^2+y^2}{2}-xy}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2}{2(x+y)}+\frac{(x-y)^2}{2(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy})} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}} \ (3) \end{array}\right.$$

Xét (3) ta có:

$$(3) \Leftrightarrow x+y=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2(x+y)=\sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\sqrt{2(x^2+y^2)}-(x+y) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\frac{2(x^2+y^2)-(x+y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\frac{(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 1=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y}\ (4) \end{array}\right.$$

Xét (4) ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2+y^2)}=2\sqrt{xy}\ (5)$$

Từ (3) $\Rightarrow x+y>0$ mà $xy \geqslant 0 \Rightarrow x,y \geqslant 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương x,y ta chứng minh được (5) xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Hợp tất cả các trường hợp, kết luận (1) $\Leftrightarrow x=y$

Thế $y=x$ vào phương trình (2), ta được: $2012^{2x-1}-2x+1=\sqrt{(2x-1)^2+1}$.

Đặt $2x-1=t$. Phương trình trên trở thành:

$$2012^t=t+\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \ln(t+\sqrt{t^2+1})-t\ln 2012=0\ (6)$$

Xét $f(t)=\ln(t+\sqrt{t^2+1})-t\ln 2012$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}-\ln 2012=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\ln 2012<0$ với mọi $t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(0)=0 \Rightarrow$(6) có duy nhất một nghiệm $t=0$

Ta có $t=0 \Rightarrow x=\dfrac{t+1}{2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=x=\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ có duy nhất 1 nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

CHƯƠNG VI: SÁNG TẠO PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

XÂY DỰNG MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỢC GIẢI BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1. Xét hệ đối xứng loại hai

$$\begin{cases} x = 2 - 3y^2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 3\left(2 - 3x^2\right)^2.$$

Ta có bài toán sau

Bài 1 (THTT, số 250, tháng 04/1998)**.** Giải phương trình

$$x + 3\left(2 - 3x^2\right)^2 = 2.$$

Giải

Đặt $y = 2 - 3x^2$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + 3y^2 = 2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y^2 & (1) \\ y = 2 - 3x^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được

$$x - y = 3(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3(x + y) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{1 - 3x}{3}. \end{array}\right.$$

• Với $y = x$, thay vào (1) ta được

$$3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}.$$

• Với $y = \dfrac{1 - 3x}{3}$, thay vào (2) ta được

$$\frac{1 - 3x}{3} = 2 - 3x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{6}.$$

Kết luận: Phương trình đã cho tập nghiệm $S = \left\{-1; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{6}\right\}$ □

⊛ Nhận xét: Từ lời giải trên ta thấy rằng nếu khai triển $\left(2 - 3x^2\right)^2$ thì sẽ đưa phương trình đã cho về phương trình đa thức bậc bốn, sau đó biến đổi thành

$$(x + 1)(3x - 2)(9x^2 - 3x - 5) = 0.$$

Vậy nếu khi xây dựng bài toán, ta cố ý làm cho phương trình không có nghiệm hữu tỉ thì phương pháp khai triển đưa về phương trình bậc cao, sau đó phân tích đưa về phương trình tích sẽ gặp nhiều khó khăn.

Ví dụ 2. Xét một phương trình bậc hai có cả hai nghiệm là số vô tỉ

$$5x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5x^2 - 1.$$

Do đó xét $\begin{cases} 2y = 5x^2 - 1 \\ 2x = 5y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 5\left(\dfrac{5x^2-1}{2}\right)^2 - 1$. Ta có bài toán sau.

Bài 2. Giải phương trình

$$8x - 5\left(5x^2 - 1\right)^2 = -4.$$

Giải

Đặt $2y = 5x^2 - 1$. Khi đó

$$\begin{cases} 2y = 5x^2 - 1 \\ 8x - 5.4y^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 5x^2 - 1 & (1) \\ 2x = 5y^2 - 1. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y-x) = 5(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 0 \\ 2 = -5(x+y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\dfrac{5x+2}{5}. \end{array}\right.$$

• Với $y = x$, thay vào (1) ta được

$$5x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}.$$

• Với $y = -\dfrac{5x+2}{5}$, thay vào (1) ta được

$$-\frac{10x+4}{5} = 5x^2 - 1 \Leftrightarrow 25x^2 + 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{50}}{25}.$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{6}}{5}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{5}\right\}$ □

⊛ Nhận xét: Phép đặt $2y = 5x^2 - 1$ được tìm ra như sau: Ta đặt $ay + b = 5x^2 - 1$, với a, b tìm sau. Khi đó thu được hệ

$$\begin{cases} ay + b = 5x^2 - 1 \\ 8x - 5\left(ay+b\right)^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay + b + 1 = 5x^2 \\ 8x + 4 - 5b^2 = 5a^2y^2 + 10aby. \end{cases}$$

Để hệ trên là hệ đối xứng loại II thì $\begin{cases} \dfrac{a}{8} = \dfrac{5}{5a^2} = \dfrac{b+1}{4-5b^2} \\ 10ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2. \end{cases}$

Vậy ta có phép đặt $2y = 5x^2 - 1$. Sau đây là một bài tương tự:

Bài 3. Giải phương trình $5(5x^2 - 17)^2 - 343x - 833 = 0$

Giải

⊛ Ý tưởng: Đặt $ay+b=5x^2-17$ $(a\neq 0) \Rightarrow \begin{cases} ay+b=5x^2-17 \\ 5(ay+b)^2-343x-833=0\ (*) \end{cases}$

Từ (*) có

$$\begin{aligned} &5(ay)^2+10aby+b^2-343x-833=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{5(ay)^2+10aby+b^2-833}{343} \\ &\Rightarrow ax+b=\frac{5a^3.y^2+10a^2.by+b^2.a-833a}{343}+b\ (**) \end{aligned}$$

Ta hi vọng có $ax+b=5y^2-17$, kết hợp với (**) suy ra

$$\begin{aligned} &5y^2-17=\frac{5a^3.y^2+10a^2.by+b^2.a-833a}{343}+b \\ &\Leftrightarrow 343.5y^2-5831=5a^3.y^2+10a^2.by+b^2.a-833a+343b \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 343=a^3 \\ a^2b=0 \\ -833a+343b=-5831 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=0 \end{cases}$

Vậy ta có lời giải sau:

⊛ Lời giải:

Đặt $7y=5x^2+17$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7y=5x^2-17 \\ 245y^2-343x-833=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=5x^2-17\ (1) \\ 7x=5y^2-17\ (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta có

$$7(y-x)=5(x+y)(x-y) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=y \\ &5x+5y=-7 \end{aligned}\right.$$

⋇ Nếu $x=y$, thay vào (1) có

$$5x^2-7x-17=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{389}}{10}$$

⋇ Nếu $5x+5y=-7$, kết hợp (2) ta có

$$7+5x+\frac{5(5x^2-17)}{7}=0 \Leftrightarrow 25x^2+35x-36=0 \Leftrightarrow x=\frac{-35\pm 5\sqrt{193}}{50}$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{7\pm\sqrt{389}}{10};\frac{-35\pm 5\sqrt{193}}{50}\right\}$ □

Ví dụ 3. Xét một phương trình bậc ba

$$4x^3-3x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8x^3-6x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow 6x=8x^3-\sqrt{3}$$

Do đó ta xét

$$\begin{cases} 6y=8x^3-\sqrt{3} \\ 6x=8y^3-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 6x=8\left(\frac{8x^3-\sqrt{3}}{6}\right)^3-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1296x + 216\sqrt{3} = 8\left(8x^3 - \sqrt{3}\right)^3$$
$$\Rightarrow 162x + 27\sqrt{3} = \left(8x^3 - \sqrt{3}\right)^3.$$

Ta có bài toán sau

Bài 4. Giải phương trình $162x + 27\sqrt{3} = \left(8x^3 - \sqrt{3}\right)^3$.

Giải

Đặt $6y = 8x^3 - \sqrt{3}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 6y = 8x^3 - \sqrt{3} \\ 162x + 27\sqrt{3} = 216y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 8x^3 - \sqrt{3} & (1) \\ 6x = 8y^3 - \sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$6(y-x) = 8(x^3 - y^3) \Leftrightarrow (x-y)\left[8\left(x^2+xy+y^2\right)+6\right] = 0. \quad (3)$$

Vì $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$ nên $8\left(x^2+xy+y^2\right)+6 > 0$. Do đó từ (3) ta được $x = y$.
Thay vào (1) ta được

$$6x = 8x^3 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \cos\frac{5\pi}{6} \quad (4)$$

Sử dụng công thức $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$, ta có

$$\cos\frac{5\pi}{6} = 4\cos^3\frac{5\pi}{18} - 3\cos\frac{5\pi}{18},$$
$$\cos\frac{17\pi}{6} = 4\cos^3\frac{17\pi}{18} - 3\cos\frac{17\pi}{18},$$
$$\cos\frac{7\pi}{6} = 4\cos^3\frac{7\pi}{18} - 3\cos\frac{7\pi}{18}.$$

Vậy $x = \cos\frac{5\pi}{18}$, $x = \cos\frac{17\pi}{18}$, $x = \cos\frac{7\pi}{18}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (4) và cũng là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho □

⊛ Nhận xét: Phép đặt $6y = 8x^3 - \sqrt{3}$ được tìm ra như sau :
Ta đặt $ay + b = 8x^3 - \sqrt{3}$. Khi đó từ phương trình đã cho có hệ

$$\begin{cases} ay + b = 8x^3 - \sqrt{3} \\ 162x + 27\sqrt{3} = a^3y^3 + 3a^2by^2 + 3ab^2y + b^3. \end{cases}$$

Cần chọn a và b sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{a}{162} = \dfrac{8}{a^3} = \dfrac{b+\sqrt{3}}{27\sqrt{3} - b^3} \\ 3a^2b = 3ab^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 6. \end{cases}$$

Vậy ta có phép đặt $6y = 8x^3 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 4. Ta sẽ xây dựng một phương trình vô tỉ có ít nhất một nghiệm theo ý muốn. Xét $x = 3$. Khi đó

$$2x - 5 = 1 \Rightarrow (2x-5)^3 = 1 \overset{\text{do } x=3}{=} x - 2.$$

Ta mong muốn có một phương trình chứa $(ax+b)^3$ và chứa $\sqrt[3]{cx+d}$, hơn nữa phương trình này được giải bằng cách đưa về hệ "gần" đối xứng loại hai (nghĩa là khi trừ theo vế hai phương trình của hệ ta có thừa số $(x-y)$). Vậy ta xét hệ

$$\begin{cases} (2y-5)^3 = x - 2 \\ (2x-5)^3 = -x + 2y - 2. \end{cases}$$

Nếu có phép đặt $2y - 5 = \sqrt[3]{x-2}$, thì sau khi thay vào phương trình

$$(2x-5)^3 = -x + 2y - 2$$

ta được

$$8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = -x + \sqrt[3]{x-2} + 5 - 2.$$

Ta có bài toán sau

Bài 5. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128.$$

Giải

Cách 1:
Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3. \quad (1)$$

Đặt $2y - 5 = \sqrt[3]{x-2}$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} (2y-5)^3 = x - 2 & (2) \\ (2x-5)^3 = -x + 2y - 2 & (3) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (2) theo vế ta được

$$2(x-y)\left[(2x-5)^2 + (2x-5)(2y-5) + (2y-5)^2\right] = 2(y-x)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 0 & (4) \\ (2x-5)^2 + (2x-5)(2y-5) + (2y-5)^2 + 1 = 0. & (5) \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Ta có (4) $\Leftrightarrow y = x$. Thay vào (2) ta được

$$(2x-5)^3 = x - 2 \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$ □

⊛ Nhận xét: Từ nghiệm duy nhất trên, ta nghĩ đến cách dùng đơn điệu hàm số như sau:

Cách 2.
Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $y = \sqrt[3]{x-2}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128 = y \\ x = y^3 + 2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{aligned} &8x^3 - 60x^2 + 152x - 128 = y^3 + y + 2 \\ \Leftrightarrow &8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 + 2x - 5 = y^3 + y \\ \Leftrightarrow &(2x-5)^3 + (2x-5) = y^3 + y. \end{aligned} \tag{*}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(*)$ viết lại

$$f(2x-5) = f(y) \Leftrightarrow 2x - 5 = y.$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned} &(2x-5) = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow (2x-5)^3 = x - 2 \\ \Leftrightarrow &8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$ □

Ví dụ 5. Xét một phương trình bậc ba nào đó, chẳng hạn xét $4x^3 + 3x = 2$. Phương trình này tương đương

$$8x^3 + 6x = 4 \Leftrightarrow 8x^3 = 4 - 6x \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Ta "lồng ghép" phương trình cuối vào một hàm đơn điệu như sau

$$(2x^3) + 2x = \sqrt[3]{4-6x} + 4 - 6x \Leftrightarrow 8x^3 + 8x - 4 = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Ta được bài toán sau:

Bài 6. Giải phương trình

$$8x^3 + 8x - 4 = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Giải

Tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$.
Cách 1:
Phương trình đã cho tương đương

$$(2x)^3 + 2x = \sqrt[3]{4-6x} + 4 - 6x. \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà (1) viết lại $f\left(\sqrt[3]{4-6x}\right) = f(2x)$ nên nó tương đương

$$\sqrt[3]{4-6x} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 + 6x = 4 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = 2. \tag{2}$$

Vì hàm số $g(x) = 4x^3 + 3x$ có $g'(x) = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên PT (2) có không quá một nghiệm. Xét

$$2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \Leftrightarrow (\alpha^3)^2 - 4\alpha^3 - 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Do đó, nếu đặt $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thì $2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right)$. Ta có

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right) = 3\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right] + 4\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right]^3.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$ là nghiệm duy nhất của (2) và cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho □

Cách 2:

Phương trình viết lại thành

$$(2x)^3 = \sqrt[3]{-6x+4} - 8x + 4.$$

Đặt $2y = \sqrt[3]{4-6x}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 8y^3 = 4 - 6x \\ 8x^3 + 8x - 4 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 = -6x + 4 & (a) \\ 8x^3 = 2y + 4 - 8x. & (b) \end{cases}$$

Lấy (b) trừ (a) theo vế ta được

$$8(x^3 - y^3) = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) + 1] = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Thay $y = x$ vào (a) ta được

$$8x^3 = -6x + 4 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = 2.$$

Đến đây làm giống cách 1.

Bài 7. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$$

(Đề đề nghị Olympic 30-4-2006)

Giải

Tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{6x+1} = 2y$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 8x^3 - 4x - 1 = 2y \\ 6x + 1 = 8y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 = 4x + 2y + 1 & (1) \\ 8y^3 = 6x + 1. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$8(x^3 - y^3) = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) + 1] = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Thay $y = x$ vào (2) ta được

$$8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \cos\frac{\pi}{3}. \quad (3)$$

Sử dụng công thức $\cos\alpha = 4\cos^3\dfrac{\alpha}{3} - 3\cos\dfrac{\alpha}{3}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9},$$
$$\cos\frac{7\pi}{3} = 4\cos^3\frac{7\pi}{9} - 3\cos\frac{7\pi}{9},$$
$$\cos\frac{5\pi}{3} = 4\cos^3\frac{5\pi}{9} - 3\cos\frac{5\pi}{9}.$$

Vậy $x = \cos\dfrac{\pi}{9}$, $x = \cos\dfrac{5\pi}{9}$, $x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (3) và cũng là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho □

⊛ Nhận xét: Ta còn có thể giải cách khác như sau : Phương trình viết lại

$$6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà (2) có thể viết lại thành $f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right) = f(2x)$ nên tương đương

$$\sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6. Xét một tam thức bậc hai luôn nhận giá trị dương : $x^2 + 2$. Khi đó

$$\int \left(x^2 + 2\right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C.$$

Chỉ cần chọn $C = 0$ ta được một đa thức bậc ba đồng biến là $h(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x$. Ta có $h(3) = 15$. Vậy ta thu được một hàm số đa thức bậc ba đồng biến $g(x)$ và thoả mãn $g(3) = 0$ là

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - 15.$$

Ta sẽ tìm một đa thức bậc ba đồng biến $k(x)$ sao cho $k(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$, muốn vậy ta xét

$$\frac{x^3}{3} + \alpha x - 15 = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + (\alpha - 1)x - 15 = 0.$$

Do đó chọn α sao cho $\alpha - 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 3$, khi đó $k(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x - 15$ và $k(x) = y$ tương đương với

$$\frac{x^3}{3} + 3x - 15 = y \Leftrightarrow x^3 + 9x - 45 = 3y.$$

Từ phương trình cuối này thay x bởi y ta thu được hệ đối xứng loại hai

$$\begin{cases} x^3 + 9x - 45 = 3y \\ y^3 + 9y - 45 = 3x. \end{cases}$$

Từ hệ trên, sử dụng phép thế ta thu được phương trình

$$\left(\frac{x^3 + 9x - 45}{3}\right)^3 + 9\left(\frac{x^3 + 9x - 45}{3}\right) - 45 = 3x$$
$$\Leftrightarrow \left(x^3 + 9x - 45\right)^3 + 81\left(x^3 + 9x - 45\right) = 1215 + 81x.$$

Vậy ta thu được bài toán sau.

Bài 8. Giải phương trình

$$\left(x^3+9x-45\right)^3+81\left(x^3+9x-45\right)=1215+81x \ (1)$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $x^3+9x-45=3y$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} x^3+9x-45=3y & (2) \\ y^3+9y-45=3x. & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (3) theo vế ta được

$$\begin{aligned} & x^3-y^3+9x-9y=3y-3x \Leftrightarrow x^3-y^3+12(x-y)=0 \\ \Leftrightarrow & (x-y)(x^2+xy+y^2+12)=0 \Leftrightarrow x=y. \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta được

$$x^3+9x-45=3x \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+15\right)=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$. □
⊛ Nhận xét: Phép đặt $x^3+9x-45=3y$ được tìm ra như sau: Ta đặt $x^3+9x-45=ay$. Khi đó

$$\begin{cases} x^3+9x-45=ay \\ a^3y^3+81ay=1215+81x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+9x-45=ay \\ a^3y^3+81ay-1215=81x. \end{cases}$$

Vậy cần chọn a thoả mãn điều kiện $\dfrac{a^3}{1}=\dfrac{81a}{9}=\dfrac{1215}{45}=\dfrac{81}{a} \Rightarrow a=3$.
Do đó đặt $x^3+6x-45=3y$, ta sẽ thu được một hệ đối xứng loại hai.

Ví dụ 7. Chọn một phương trình chỉ có hai nghiệm là 0 và 1 là $11^x=10x+1$. Từ phương trình này ta thiết lập một hệ đối xứng loại hai, sau đó lại quay về phương trình như sau :

$$\begin{cases} 11^x=10y+1 \\ 11^y=10x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\log_{11}(10x+1) \\ 11^x=10y+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{11^x-1}{10}=\log_{11}(10x+1)$$
$$\Rightarrow 11^x=10\log_{11}(10x+1)+1 \Rightarrow 11^x=2\log_{11}(10x+1)^5+1.$$

Ta có bài toán sau.

Bài 9. Giải phương trình $11^x=2\log_{11}(10x+1)^5+1$.

Giải

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{10}$. Đặt $y=\log_{11}(10x+1)$, khi đó $11^y=10x+1$. Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} 11^x=10y+1 & (1) \\ 11^y=10x+1 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$11^x-11^y=10y-10x \Leftrightarrow 11^x+10x=11^y+10y. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 11^t + 10t$. Ta có $f'(t) = 11^t \ln 11 + 10 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà (3) chính là $f(x) = f(y)$ nên $x = y$. Thay vào (1) ta được

$$11^x = 10x + 1 \Leftrightarrow 11^x - 10x - 1 = 0. \tag{4}$$

Xét hàm số $g(x) = 11^x - 10x - 1$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{10}; +\infty\right)$. Ta có

$$g'(x) = 11^x \ln 11 - 10,\ g''(x) = 11^x (\ln 11)^2 > 0.$$

Vậy hàm số g có đồ thị luôn lõm trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{10}; +\infty\right)$, suy ra đồ thị của hàm g và trục hoành có với nhau không quá hai điểm chung, suy ra (4) có không quá 2 nghiệm. Mà $g(1) = 0$, $g(0) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 1$ là tất cả các nghiệm của (4).
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$ và $x = 1$. □

Ví dụ 8. Ta sẽ sử dụng phương pháp lặp để sáng tác phương trình từ hệ phương trình đối xứng loại hai. Xuất phát từ

$$\begin{cases} 4x = \sqrt{30+u} \\ 4u = \sqrt{x+30}, \end{cases}$$

sử dụng phép thế ta được phương trình $4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}$. Từ phương trình này ta lại thu được hệ đối xứng loại hai

$$\begin{cases} 4u = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}} \\ 4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{u+30}}. \end{cases}$$

Từ hệ này, tiếp tục sử dụng phép thế ta thu được phương trình

$$4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}.$$

Ta có bài toán sau.

Bài 10 (Đề nghị Olympic 30/04/2010)**.** Giải phương trình

$$4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}.$$

Giải

Để x là nghiệm thì $x > 0$. Đặt $u = \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}$, từ phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} 4u = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}} \\ 4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{u+30}}. \end{cases} \tag{1}$$

Giả sử $x \geqslant u$. Khi đó

$$4u = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}} \geqslant \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{u+30}} = 4x \Rightarrow u \geqslant x \Rightarrow x = u.$$

Vậy từ hệ (1) ta có $x = u$ và

$$4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}. \qquad (2)$$

Đặt $v = \frac{1}{4}\sqrt{x+30}$, từ (2) ta có hệ

$$\begin{cases} 4x = \sqrt{30+v} \\ 4v = \sqrt{x+30}. \end{cases} \qquad (3)$$

Giả sử $x \geqslant v$. Khi đó

$$4v = \sqrt{x+30} \geqslant \sqrt{v+30} = 4x \Rightarrow 4v \geqslant 4x \Rightarrow v \geqslant x \Rightarrow v = x.$$

Vậy $v = x$ và $4x = \sqrt{x+30} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 16x^2 = x + 30 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{1921}}{32}$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+\sqrt{1921}}{32}$. □

SỬ DỤNG CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC ĐỂ SÁNG TÁC CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC BẬC CAO

Trong mục này ta sẽ dùng một số công thức lượng giác để sáng tác ra các phương trình đa thức bậc cao. Việc giải các phương trình đa thức bậc cao là rất phức tạp, trong nhiều trường hợp là không thể. Tuy nhiên sử dụng tính chất phương trình đa thức bậc n ($n = 1, 2, \dots$) có không quá n nghiệm, và một số định hướng trong quá trình sáng tác đề toán, ta có được lời giải rất ngắn gọn và ấn tượng cho các phương trình dạng này.

Ví dụ 9. Từ công thức

$$\cos 6\alpha = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1$$

Lấy $\cos\alpha = x$ ta được

$$\cos 6\alpha = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

Chọn $6\alpha = \frac{\pi}{3}$ ta được

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \frac{1}{2}$$

Ta có bài toán sau.

Bài 11 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009)**.** Giải phương trình

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0.$$

Giải

Ta có

$$\cos 6\alpha = 2\cos^2 3\alpha - 1 = 2\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)^2 - 1$$
$$= 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1. \quad (1)$$

Phương trình đã cho tương đương

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \cos\frac{\pi}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra (2) có 6 nghiệm là $x = \cos\left(\frac{\pi}{3.6} + \frac{k2\pi}{6}\right)$, $k = \overline{1,5}$. □

⊛ Nhận xét: Việc sử dụng công thức biểu diễn $\cos n\alpha$ theo $\cos\alpha$, $\sin n\alpha$ theo $\sin\alpha$ sẽ giúp ta giải được những phương trình dạng này.

Ví dụ 10. Từ $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$, Đặt $\cos\alpha = \frac{x}{2\sqrt{3}}$ ta được

$$\cos 5\alpha = \frac{16x^5}{288\sqrt{3}} - \frac{20x^3}{24\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}} = \frac{x^5}{18\sqrt{3}} - \frac{5x^3}{6\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}} = \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}}.$$

Chọn $5\alpha = \frac{\pi}{6}$ được $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$. Ta có bài toán sau.

Bài 12 (Đề nghị Olympic 30/04/2011)**.** Giải phương trình

$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $x = 2\sqrt{3}t$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$288\sqrt{3}t^5 - 360\sqrt{3}t^3 + 90\sqrt{3}t - 27 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(16t^5 - 20t^3 + 5t\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t = \cos\frac{\pi}{6}. \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$\cos 5\alpha + \cos\alpha = 2\cos 3\alpha\cos 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 2\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 2\left(8\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\right) - \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra (1) có 5 nghiệm là $t = \cos\left(\frac{\pi}{6.5} + \frac{k2\pi}{5}\right)$, $k = \overline{0,4}$ Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm là $x = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{30} + \frac{k2\pi}{5}\right)$, $k = \overline{0,4}$. □

⊛ Nhận xét: Trong lời giải trên, phép đặt $x = 2\sqrt{3}t$ tìm ra như sau : Do công thức

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$

nên đặt $x = at$, với a sẽ tìm sau. Thay $x = at$ vào phương trình đã cho ta được

$$a^5t^5 - 15a^3t^3 + 45at - 27 = 0.$$

Ta tìm a thoả điều kiện $\frac{a^5}{16} = \frac{15a^3}{20} = \frac{45a}{5} \Rightarrow \frac{a^4}{16} = \frac{3a^2}{4} = 9 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$. Vậy ta có phép đặt $x = 2\sqrt{3}t$.

Ví dụ 11. Từ $\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$, lấy $\sin\alpha = 2x$ ta được $\sin 5\alpha = 512x^5 - 160x^3 + 10x$. Chọn $5\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, ta có

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 512x^5 - 160x^3 + 10x \Leftrightarrow 1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0.$$

Ta được bài toán sau.

Bài 13. Giải phương trình $1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0$.

Giải

Đặt $x = \dfrac{t}{2}$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$32t^5 - 40t + 10 = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t = \sin\frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 5\alpha + \sin\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 2\alpha\\
\Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 2\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) - \sin\alpha\\
\Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 2\left(8\sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\right) - \sin\alpha\\
\Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha. \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (2) suy ra (1) có 5 nghiệm là $t = \sin\left(\dfrac{\pi}{3.5} + \dfrac{k2\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Phương trình đã cho có 5 nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{k2\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. □

Ví dụ 12. Ta xét phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$. Dễ thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình này. Ta không đi theo con đường lượng giác mà sẽ biến đổi đại số ngay từ phương trình ban đầu, cụ thể là bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned}
&x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0\\
\Leftrightarrow &(x-2)\left(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ta chỉ xét $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Lại đặt thêm ẩn phụ để che lấp vấn đề kĩ hơn: thay x bởi $2x$, ta được $32x^5 + 32x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 2x + 1 = 0$. Ta được bài toán sau.

Bài 14 (Đề nghị Olympic 30/04/2011)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1\\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 512y^5 - 160y^3 + 10y + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Giải

Đặt $t = 2y$, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x^2 + t^2 = 1 & (1)\\ 16(x^5 + t^5) - 20(x^3 + t^3) + 5(x + t) = -\sqrt{2}. & (2) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ t = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$. Thay vào (2) ta được

$$\left(16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha\right) + \left(16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha\right) = -\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin 5\alpha + \cos 5\alpha = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5}.$$

Vì $\alpha \in [0; 2\pi]$ nên $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{20}, \frac{21\pi}{20}, \frac{29\pi}{20}, \frac{37\pi}{20}\right\}$, từ đây suy ra x, y. □

⊛ Nhận xét: Lời giải trên đã tận dụng "một sự trùng lặp thú vị" của hàm sin và cos :

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha; \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$$

SỬ DỤNG CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC HYPERBOLIC

Sử dụng các đồng nhất thức đại số có xuất sứ từ các hàm lượng giác hypebôlic ta có thể sáng tác được một số phương trình đa thức bậc cao có cách giải đặc thù.

Ví dụ 13. Ta có $\frac{1}{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) = 16m^5 + 20m^3 + 5m$, trong đó $m = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$.
Đặt $m = \frac{x}{2\sqrt{2}}$, khi đó

$$\frac{1}{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) = \frac{16x^5}{128\sqrt{2}} + \frac{20x^3}{16\sqrt{2}} + \frac{5x}{2\sqrt{2}} = \frac{x^5}{8\sqrt{2}} + \frac{10x^3}{8\sqrt{2}} + \frac{20x}{8\sqrt{2}}.$$

Lấy $\frac{1}{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) = \frac{18}{8\sqrt{2}}$, ta được bài toán sau.

Bài 15. Giải phương trình $x^5 + 10x^3 + 20x - 18 = 0$.

Giải

Ta thấy rằng

$$x = \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}a^2 - xa - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{x \pm \sqrt{x^2+8}}{2\sqrt{2}}.$$

Do đó ta có quyền đặt $x = \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$. Khi đó

$$x^5 = 4\sqrt{2}\left(a^5 - 5a^3 + 10a - \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} - \frac{1}{a^5}\right)$$
$$10x^3 = 20\sqrt{2}\left(a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3}\right),\ 20x = 20\sqrt{2}\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$4\sqrt{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) - 18 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}(a^5)^2 - 18a^5 - 4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^5 = \dfrac{9+\sqrt{113}}{4\sqrt{2}} \\ a^5 = \dfrac{9-\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}\left(\sqrt[5]{\dfrac{9+\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}} - \sqrt[5]{\dfrac{4\sqrt{2}}{9+\sqrt{113}}}\right)$. □

⊛ Nhận xét: Trong lời giải trên, phép đặt $x = \sqrt{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$ được tìm ra như sau :

Do công thức $\dfrac{1}{2}\left(a^5 - \dfrac{1}{a^5}\right) = 16m^5 + 20m^3 + 5m$, trong đó $m = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$ nên ta đặt $x = pm$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$p^5m^5 + 10p^3m^3 + 20pm - 18 = 0$$

Ta tìm p thoả mãn điều kiện

$$\frac{p^5}{16} = \frac{10p^3}{20} = \frac{20p}{5} \Rightarrow \frac{p^4}{16} = \frac{p^2}{2} = 4 \Rightarrow p = \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy ta có phép đặt $x = \sqrt{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$.

Ví dụ 14. Từ đồng nhất thức $\dfrac{1}{2}\left(a^5 + \dfrac{1}{a^5}\right) = 16m^5 - 20m^3 + 5m$, trong đó $m = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.
Lấy $m = x$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Lấy $\dfrac{1}{2}\left(a^5 + \dfrac{1}{a^5}\right) = -7$ ta được phương trình

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 7 = 0$$

Từ phương trình này ta được phương trình

$$(x-1)(16x^5 - 20x^3 + 5x + 7) = 0$$

Vậy ta có bài toán sau.

Bài 16 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2008)**.** Giải phương trình

$$16x^6 - 16x^5 - 20x^4 + 20x^3 + 5x^2 + 2x - 7 = 0. \quad (1)$$

Giải

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x = -7 \ (2) \end{array}\right.$$

Tiếp theo ta giải phương trình (2).

• Nếu $|x| \leqslant 1$ thì đặt $x = \cos t$, với $t \in [0;\pi]$. Thay vào (2) ta được

$$6\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t = -7 \Leftrightarrow \cos 5t = -7 \text{ (vô nghiệm)}.$$

• Nếu $|x| > 1$ thì xét phương trình

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 - 2xa + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = x + \sqrt{x^2-1} \\ a = x - \sqrt{x^2-1}. \end{array}\right.$$

Vậy nếu đặt $a = x + \sqrt{x^2 - 1}$ thì $x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$. Ta có

$$16x^5 = 16\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^5 = \frac{1}{2}\left(a^5 + 5a^3 + 10a + \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} + \frac{1}{a^5}\right)$$
$$20x^3 = 20\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 = \frac{5}{2}\left(a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3}\right); 5x = \frac{5}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Suy ra $16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right)$. Thay vào (2) được

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = -7 \Leftrightarrow \left(a^5\right)^2 + 14a^5 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^5 = -7 - \sqrt{48} \\ a^5 = -7 + \sqrt{48} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt[5]{-7 - \sqrt{48}} \\ a = \sqrt[5]{-7 + \sqrt{48}}. \end{array}\right.$$

Do $(-7 - \sqrt{48})(-7 + \sqrt{48}) = 1$ nên (2) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7 - \sqrt{48}} + \sqrt[5]{-7 + \sqrt{48}}\right).$$

Nghiệm của (1) là $x = 1, x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7 - \sqrt{48}} + \sqrt[5]{-7 + \sqrt{48}}\right)$. □

⊛ Nhận xét: Khi giải phương trình, hãy nhẩm những nghiệm "đẹp" của phương trình bất cứ lúc nào có thể.

SÁNG TÁC MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP ĐỐI VỚI HAI BIỂU THỨC

Ta biết rằng nếu một phương trình đẳng cấp bậc k đối với hai biểu thức $P(x)$ và $Q(x)$ thì được giải bằng cách chia cả hai vế cho $[P(x)]^k$ (hoặc $[Q(x)]^k$), sau đó đặt $t = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (hoặc $t = \frac{Q(x)}{P(x)}$), đưa về phương trình đa thức bậc k theo t. Vận dụng điều này ta có một phương pháp đơn giản để tạo ra nhiều phương trình thú vị.

Ví dụ 15. Xét một phương trình bậc hai

$$7t^2 + 13t - 2 = 0.$$

Lấy $t = \frac{x-1}{x^2 + x + 1}$ ta được

$$7.\left(\frac{x-1}{x^2 + x + 1}\right)^2 + 13.\frac{x-1}{x^2 + x + 1} - 2 = 0.$$

Quy đồng bỏ mẫu ta được bài toán sau

Bài 17 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009)**.** Giải phương trình

$$2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1).$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Do $x^2+x+1>0$ nên chia cả hai vế phương trình cho $(x^2+x+1)^2>0$ ta được

$$2-7.\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2=13.\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Đặt $t=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. Khi đó

$$2-7t^2=13t \Leftrightarrow 7t^2+13t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=\dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$$

• Khi $t=-2$ ta được

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=-2 \Leftrightarrow 2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

• Khi $t=\dfrac{1}{7}$ ta được

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{7} \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x=-1$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=2$, $x=4$. □

⊛ Nhận xét: Phương trình này có nhiều hơn một nghiệm, và các nghiệm của phương trình này đều là số nguyên và số hữu tỉ, do đó ta có thể giải nhanh chóng bằng cách khai triển đưa về phương trình bậc bốn, sau đó nhẩm nghiệm, đưa về phương trình tích.

Ví dụ 16. Xét một phương trình bậc hai có nghiệm

$$2t^2-7t+3=0.$$

Lấy $t=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}$ ta được

$$2\frac{x^2+x+1}{x-1}-7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}}+3=0.$$

Quy đồng bỏ mẫu ta được

$$2(x^2+x+1)+3(x-1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Ta có bài toán sau

Bài 18 (Đề nghị OLYPIC 30/04/2007)**.** Giải phương trình

$$2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}. \qquad (2)$$

Vì $x = 1$ không phải là nghiệm nên chia cả hai vế của (2) cho $x - 1 > 0$ ta được

$$3 + 2\frac{x^2+x+1}{x-1} = 7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}}. \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} \Rightarrow x^2 + (1-t^2)x + 1 + t^2 = 0$. Điều kiện của t là

$$\begin{cases} t \geqslant 0 \\ \Delta_x = t^4 - 6t^2 - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geqslant \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Phương trình (3) trở thành $2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{3, \frac{1}{2}\right\}$.

Kết hợp với điều kiện của t ta được $t = 3$. Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} = 3 \Leftrightarrow 9x - 9 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 4 \pm \sqrt{6}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (1). □

⊛ Nhận xét: Gọi $Q(x) = x - 1, P(x) = x^2 + x + 1$. Mấu chốt của lời giải là phân tích vế trái của PT (1) thành

$$VT = 2P(x) + 3Q(x).$$

Tinh ý ta sẽ thấy 2 là hệ số của x^2 trong vế trái của (1). Cũng từ đó suy ra 3. Tuy nhiên dễ dàng tìm được các số 2 và 3 bằng phương pháp hệ số bất định

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 5x - 1 = p(x^2 + x + 1) + q(x - 1) \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 5x - 1 = px^2 + (p+q)x + p - q. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} p = 2 \\ p + q = 5 \\ p - q = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 17. Xét $x = 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} & (x^2 + 2x + 2) = 10,\ x + 1 = 3, \\ & 3(x^2 + 2x + 2) - 8(x + 1) = 6, \\ & (x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 30, \\ & (x + 1)(x^2 + 2x + 2) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

Vậy với $x = 2$ thì

$$3(x^2 + 2x + 2) - 8(x + 1) = \sqrt{30}.\frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$$

Ta có bài toán sau

Bài 19. Giải phương trình

$$3x^2 - 2x - 2 = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$$

Giải

Điều kiện

$$x^3+3x^2+4x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+2) \Leftrightarrow x \geqslant -1.$$

Phương trình đã cho viết lại

$$3(x^2+2x+2)-8(x+1)=\frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}. \quad (1)$$

Dễ thấy $x=-1$ không là nghiệm của (1).
Tiếp theo xét $x \neq -1$. Chia cả hai vế của (1) cho $x+1>0$ ta được

$$3.\frac{x^2+2x+2}{x+1}-8=\frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x+1}}. \quad (2)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}}>0$. Khi đó

$$3t^2-8=\frac{6}{\sqrt{30}}t \Leftrightarrow 3t^2-\frac{6}{\sqrt{30}}t-8=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{30}t^2-6t-8\sqrt{30}=0. \quad (3)$$

Nhận xét rằng t là nghiệm dương của phương trình (3), hay $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$. Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x+1}}=\sqrt{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow 3x^2+6x+6=10x+10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. □

Bài 20. Giải phương trình

$$x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}. \quad (1)$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Vì

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

nên

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$
$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}>0$. Khi đó

$$2t^2-1+\frac{\sqrt{3}}{3}t=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}t^2+t-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ t=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. □

Bài 21. Giải phương trình $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

Giải

Điều kiện : $x>-3$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&2(x^2-2x+4)-2(x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\\ \Leftrightarrow\ &2-2.\frac{x+2}{x^2-2x+4}=3\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}}.\end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}\geqslant 0$. Khi đó

$$2-2t^2=3t\Leftrightarrow 2t^2+3t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\ t=-2\,(\text{loại}).\end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{13}\\ x=3+\sqrt{13}.\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=3-\sqrt{13}$ và $x=3+\sqrt{13}$. □

Bài 22 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0.$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases}x^2+x-6\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\\ 3x^2-6x+19\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 2$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}\\ \Leftrightarrow &x^2+x-6+6\sqrt{(x^2+x-6)(x-1)}+9x-9=3x^2-6x+19\\ \Leftrightarrow &3\sqrt{(x-2)(x+3)(x-1)}=x^2-8x+17\\ \Leftrightarrow &3\sqrt{(x^2+2x-3)(x-2)}=(x^2+2x-3)-10(x-2) &(1)\\ \Leftrightarrow &3\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}}=\frac{x^2+2x-3}{x-2}-10. &(2)\end{aligned}$$

(Do $x=2$ không là nghiệm của (2)). Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}}\geqslant 0$. Thay vào (2) ta được

$$3t=t^2-10\Leftrightarrow t^2-3t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\ (\text{loại})\\ t=5.\end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 47 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{23 \pm \sqrt{341}}{2}$. □

Bài 23. Giải phương trình

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^3 + x\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}. \quad (1)$$

Giải

Do $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^2(x+1)^2 + (1-x)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nếu x là nghiệm của (1) thì

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Với điều kiện đó thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x+1)^2 + (1-x)^2 = (x^2+1)\sqrt{(1-x)[x(1+x)]}. \quad (2)$$

Đặt $u = x(1+x)$, $v = 1-x$ (điều kiện $u > 0$, $v > 0$). Khi đó $u + v = x^2 + 1$. Vậy (2) trở thành

$$u^2 + v^2 = (u+v)\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)^2 + 1 = \left(\frac{u\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right). \quad (3)$$

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, thay vào (3) ta được

$$t^4 + 1 = t^3 + t \Leftrightarrow (t-1)(t^3-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1 \Leftrightarrow u = v$. Do đó

$$x(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1 + \sqrt{2}$. □

Bài 24. Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 \geqslant 0 \\ x^2 - x - 20 \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(5x+9) \geqslant 0 \\ (x+4)(x-5) \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 5.$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)}$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}. \quad (2)$$

Với điều kiện $x \geqslant 5$, chia cả hai vế của (2) cho $x + 4 > 0$ ta được

$$2.\frac{x^2-4x-5}{x+4} + 3 = 5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} \geqslant 0$, thay vào (3) ta được

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Khi $t = 1$, ta có

$$\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Khi $t = \dfrac{3}{2}$, ta có $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = \dfrac{3}{2}$, nghĩa là

$$4(x^2 - 5x - 5) = 9x + 36 \Leftrightarrow 4x^2 - 35x - 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -\dfrac{7}{4}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm của phương trình đã cho là $x = 8$, $x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$. □

XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH TỪ CÁC ĐẲNG THỨC

Xuất phát từ một đẳng thức nào đó, chúng ta có thể xây dựng lên các phương trình vô tỉ. Chẳng hạn từ hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

ta có

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Bằng cách chọn a, b, c sao cho $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ ta xẽ tạo ra được phương trình vô tỉ chứa căn bậc ba.

Ví dụ 18. Cho

$$a = \sqrt[3]{7x+1},\ b = -\sqrt[3]{x^2-x-8},\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$$

thì $a^3 + b^3 + c^3 = 8$. Ta được bài toán sau

Bài 25 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/1999)**.** Giải phương trình

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt

$$a = \sqrt[3]{7x+1},\ b = -\sqrt[3]{x^2-x-8},\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3 = 8 & (1) \\ a+b+c = 2 & (2) \end{cases}$$

Mặt khác ta có hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \tag{3}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \\ \sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \\ \sqrt[3]{x^2-8x-1} = -\sqrt[3]{7x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+1 = x^2-x-8 \\ x^2-x-8 = x^2-8x-1 \\ x^2-8x-1 = -7x-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x-9 = 0 \\ 7x = 7 \\ x^2-x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 9 \\ x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị $-1, 0, 1, 9$ vào phương trình đã cho thấy thoả mãn. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 0; 1; 9\}$. □

Ví dụ 19. Cho

$$a = \sqrt[3]{3x^2-x+2001},\ b = -\sqrt[3]{3x^2-7x+2002},\ c = -\sqrt[3]{6x-2003}$$

thì $a^3+b^3+c^3 = 2002$. Ta được bài toán sau

Bài 26. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001} - \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} - \sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}.$$

Giải

Đặt

$$a = \sqrt[3]{3x^2-x+2001},\ b = -\sqrt[3]{3x^2-7x+2002},\ c = -\sqrt[3]{6x-2003}.$$

Khi đó

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

Việc giải phương trình đã cho được quy về giải

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{3x^2-x+2001}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}\\ \sqrt[3]{3x^2-7x+2002}=-\sqrt[3]{6x-2003}\\ \sqrt[3]{6x-2003}=\sqrt[3]{3x^2-x+2001}.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{6}\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{6};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$. □

Ví dụ 20. Cho

$$a=\sqrt[3]{1945x+1975},\ b=\sqrt[3]{60x+15},\ c=\sqrt[3]{15-x}$$

thì $a^3+b^3+c^3=2004x+2005$. Ta được bài toán sau

Bài 27. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{1945x+1975}+\sqrt[3]{60x+15}+\sqrt[3]{15-x}-\sqrt[3]{2004x+2005}=0.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt

$$a=\sqrt[3]{1945x+1975},\ b=\sqrt[3]{60x+15},\ c=\sqrt[3]{15-x}.$$

Khi đó $a^3+b^3+c^3=2004x+2005$. Thay vào PT đã cho ta được

$$a+b+c-\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}=0\Leftrightarrow a+b+c=\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3 \quad (1)$$

Mặt khác ta có hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\ b=-c\\ c=-a.\end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l}1945x+1975=-60x-15\\ 60x+15=x-15\\ 15-x=-(1945x+1975)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1990}{2005}\\ x=-\dfrac{30}{59}\\ x=-\dfrac{1990}{1944}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm $x=-\dfrac{1990}{2005}$, $x=-\dfrac{30}{59}$, $x=-\dfrac{1990}{1944}$. □

Ví dụ 21. Cho $a=\sqrt[3]{3x+1}$, $b=\sqrt[3]{5-x}$, $c=\sqrt[3]{2x-9}$ thì $a^3+b^3+c^3=4x-3$. Ta được bài toán sau

Bài 28. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0.$$

Ví dụ 22. Từ hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2,$$

lấy $a = \sqrt[3]{x+1}$, $b = -\sqrt[3]{x+2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 - ab(a+b) \\ =& x + 1 - x - 2 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) \\ =& -1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right). \end{aligned}$$

Bằng cách cho $a^3 + b^3 - ab(a+b) = 0$ ta được bài toán sau:

Bài 29. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 1.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại

$$(x+1) + (x-2) + \sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 0. \qquad (*)$$

Đặt $a = \sqrt[3]{x+1}$, $b = -\sqrt[3]{x+2}$. Thay vào (*) ta được

$$a^3 + b^3 - ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x+2} \\ \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = -x-2 \\ 0x = 1\ (v) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Thử lại ta thấy $x = -\dfrac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □

XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH TỪ CÁC HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 = ay + b & (1) \\ (\alpha y + \beta)^2 = ax + b & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \alpha y + \beta = \sqrt{ax+b} \\ \alpha y + \beta = -\sqrt{ax+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{ax+b}}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha} \\ y = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}. \end{array}\right.$$

Thay vào (1) ta được

$$\left[\begin{array}{l} (\alpha x + \beta)^2 = \dfrac{a\sqrt{ax+b}}{\alpha} - \dfrac{a\beta}{\alpha} + b\ (\bigstar) \\ (\alpha x + \beta)^2 = \dfrac{-a\sqrt{ax+b}}{\alpha} - \dfrac{a\beta}{\alpha} + b. \end{array}\right.$$

Đến đây bằng cách chọn α, β, a, b ta sẽ xây dựng được các phương trình vô tỉ. Cách giải các phương trình dạng này là đặt $\alpha y + \beta = \sqrt{ax+b}$ (hoặc $-\sqrt{ax+b}$) để đưa về hệ đối xứng loại II ở trên đã biết cách giải. Bây giờ ta sẽ đi xây dựng một số phương trình dạng này

Ví dụ 23. Cho $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $a = 3$, $b = 8$ thay vào (★) ta được

$$(3x+2)^2 = \sqrt{3x+8} + 6.$$

Ta có bài toán sau

Bài 30. Giải phương trình
$$9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}.$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant -\dfrac{8}{3}$. Phương trình viết lại

$$(3x+2)^2 - 6 = \sqrt{3x+8}. \qquad (1)$$

Đặt $3y + 2 = \sqrt{3x+8}$, suy ra $(3y+2)^2 = 3x+8$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} (3x+2)^2 = 3y+8 & (2) \\ (3y+2)^2 = 3x+8. & (3) \end{cases}$$

Để x, y thoả mãn (1) và (2) thì $x \geqslant -\dfrac{8}{3}$ và $y \geqslant -\dfrac{8}{3}$. Lấy (2) trừ (3) ta được

$$3(x-y)(3x+3y+4) = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x + 3y + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ 3y = -(3x+5). \end{array}\right.$$

• Với $y = x$, thay vào (2) ta được

$$(3x+2)^2 = 3x+8 \Leftrightarrow 9x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{3} & \text{(nhận)} \\ x = -\dfrac{4}{3} & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

• Với $y = -(3x+5)$, thay vào (2) ta được

$$(3x+2)^2 = -3x+3 \Leftrightarrow 9x^2 + 15x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{6} & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6} & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

Các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{1}{3}$ và $x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}$. □

Ví dụ 24. Cho $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$ thay vào (★) ta được

$$(x+1)^2 = \frac{\sqrt{\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{3}{2}} + 2.$$

Ta có bài toán sau

Bài 31. Giải phương trình $2x^2 + 4x = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

Ví dụ 25. Cho $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ a = 8000,\ b = 1$ thay vào (★) ta được

$$(2x-1)^2 = 4000\sqrt{8000x+1} + 4001$$

Ta có bài toán sau

Bài 32. Giải phương trình

$$x^2 - x - 1000\sqrt{8000x+1} = 1000$$

Sau đây là một cách xây dựng hệ khác:
Nếu xét hệ

$$\begin{cases} (\alpha x + \beta)^3 = ay + b \\ (\alpha y + \beta)^3 = ax + b. \end{cases}$$

Từ phương trình dưới ta được

$$\alpha y + \beta = \sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{ax+b}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Thay vào phương trình trên của hệ :

$$(\alpha x + \beta)^3 = \frac{a\sqrt[3]{ax+b}}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha} + b.$$

Ví dụ 26. Chọn $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a = 3$, $b = 5$, ta được

$$(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2.$$

Ta có bài toán sau

Bài 33 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009)**.** Giải phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2. \qquad (1)$$

Đặt $y + 1 = \sqrt[3]{3x+5}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} (x+1)^3 = 3y + 5 \quad (1) \\ (y+1)^3 = 3x + 5 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$\begin{aligned} &(x+1)^3 - (y+1)^3 = -3(x-y) \\ \Leftrightarrow &(x-y)[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3] = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = y \ \left(\text{do } (x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 \geqslant 0\right).$$

Thay vào (1) ta được

$$(x+1)^3 = 3x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$. □

Ví dụ 27. Cho $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $a = 4004$, $b = -2001$ ta được

$$(2x)^3 = 2002\sqrt[3]{4004x - 2001} - 2001.$$

Ta có bài toán sau

Bài 34. Giải phương trình $\left(\dfrac{8x^3 + 2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001.$

Xây dựng phương trình vô tỉ dựa vào tính đơn điệu của hàm số.

Dựa vào kết quả "Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$" ta có thể xây dựng được nhiều phương trình, hệ phương trình.

Ví dụ 28. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Cho $f(x+1) = f(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4})$ ta được

$$2(x+1)^3 + (x+1)^2 + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1} + 3x - 1 + 1.$$

Ta được bài toán sau

Bài 35. Giải phương trình

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y & (1) \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y. \tag{3}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (3) viết lại

$$f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y.$$

Bởi vậy

$$\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} = x + 1 \Leftrightarrow 7x^2 + 9x - 4 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\{5; \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$. □

Ví dụ 29. Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Cho

$$f\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)=f(x-1).$$

ta được

$$-x^3+9x^2-19x+11+2\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}=(x-1)^3+2(x-1).$$

Khai triển và rút gọn ta được bài toán sau

Bài 36 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009)**.** Giải phương trình

$$x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}.$$

Giải

Đặt $y=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} y^3=-x^3+9x^2-19x+11 \\ y=x^3-6x^2+12x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=-x^3+9x^2-19x+11 \\ 2y=2x^3-12x^2+24x-14 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình với nhau ta được

$$y^3+2y=x^3-3x^2+5x-3 \Leftrightarrow y^3+2y=(x-1)^3+2(x-1). \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$. Với mọi $t_1\neq t_2$, ta có

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=t_1^2+t_1t_2+t_2^2+2=\left(t_1+\frac{t_2}{2}\right)^2+\frac{3t_2^2}{2}+2>0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow f(y)=f(x-1) \Leftrightarrow y=x-1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}=x-1 \\ &\Leftrightarrow -x^3+9x^2-19x+11=x^3-3x^2+3x-1 \\ &\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow x\in\{1,2,3\}. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm $x=1, x=2, x=3$. □

Ví dụ 30. Xét hàm số $f(t)=2t^3+t^2+1$ đơn điệu trên $[0;+\infty)$. Cho

$$f(x+1)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)$$

ta được

$$2(x+1)^3+(x+1)^2+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}+3x-1+1.$$

Ta được bài toán sau

Bài 37. Giải phương trình

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}.$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant \dfrac{1}{3}$. Đặt $y = \sqrt{3x-1}$, $y \geqslant 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2y^3 \\ 3x - 1 = y^2. \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình trên ta được

$$2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 2y^3 + y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + (x+1)^2 = 2y^3 + y^2. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2$. Vì $f'(t) = 6t^2 + 2t \geqslant 0, \forall t \geqslant 0$ nên hàm số f đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3x-1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. □

Ví dụ 31. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Nếu cho $f(2x) = f(\sqrt[3]{6x+1})$ thì được

$$8x^3 + 2x = 6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1.$$

Ta được bài toán sau

Bài 38. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

Ví dụ 32. Xét hàm số $f(t) = t\left(1 + \sqrt{t^2+2}\right)$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $f(t) = t\left(1 + \sqrt{t^2+2}\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Cho $f(2x+3) = f(-3x)$ ta được

$$(2x+3)\left(1 + \sqrt{4x^2+12x+11}\right) = -3x\left(1 + \sqrt{9x^2+2}\right).$$

Ta có bài toán

Bài 39. Giải phương trình

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11} + 3x\left(1 + \sqrt{9x^2+2}\right) = -5x - 3.$$

Ví dụ 33. Xét hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

$$f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0.$$

Cho $f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ ta được

$$\log_2 \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) - 2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Ta có bài toán sau

Bài 40. Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} x \in (-2; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

Khi đó phương trình viết lại

$$\log_2 \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) - 2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t.\ln 2} + 2t - 2 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{t.\ln 2}.2t} - 2 = 2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} - 2 > 0$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2+\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Với điều kiện $x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$, bình phương hai vế phương trình (2) ta được

$$x + 2 = 4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta thấy PT đã cho có hai nghiệm $x = -1$ và $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. □

Xây dựng phương trình vô tỉ dựa vào các phương trình lượng giác.

Từ một phương trình lượng giác đơn giản nào đó, kết hợp với các phép biến đổi lượng giác thì sẽ tìm ra các phương trình vô tỉ hay. Từ một phương trình lượng giác đơn giản nào đó, kết hợp với các phép biến đổi lượng giác thì sẽ tìm ra các phương trình vô tỉ hay.

Ví dụ 34. Từ phương trình $\cos 3t = \cos\frac{t}{2}$, với $t \in [0;\pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với $8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2(1+\cos t)}$. Đặt $x = 2\cos t$ ta được bài toán sau.

Bài 41 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2006)**.** Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant -2$. Nếu $x > 2$ thì

$$x^3 - 3x = x + x(x^2-4) > x > \sqrt{2x} = \sqrt{x+x} > \sqrt{x+2}.$$

Vậy $x > 2$ không thoả mãn (1), do đó để giải phương trình (1), chỉ cần xét $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Khi đó đặt $x = 2\cos t$, điều kiện $t \in [0;\pi]$. Thay vào (1) ta được

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\left(1+\cos t\right)} \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\frac{t}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{k4\pi}{5} \\ t = \frac{k4\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in [0;\pi]$ nên chỉ lấy các nghiệm $t = 0$, $t = \frac{4\pi}{5}$, $t = \frac{4\pi}{7}$. Phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 2$, $x = 2\cos\frac{4\pi}{5}$, $x = 2\cos\frac{4\pi}{7}$. $\square$

Ví dụ 35. Từ phương trình $\cos 3t = \sin t$, với $t \in [0;\pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với $4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1-\cos^2 t}$. Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau:

Bài 42 (Đề nghị Olympic 30/04/2003-toán 10)**.** Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}.$$

Nếu thay x bởi $x-1$ ta được bài toán khó hơn:

Bài 43. Giải phương trình $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x-x^2}$.

Ví dụ 36. Từ phương trình $\sin 3t = \cos t$,với $t \in [0;\pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$3\sin t - 4\sin^3 t = \cos x \Leftrightarrow \sin t\left(3 - 4\sin^2 t\right) = \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t - 1\right) = \cos t \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\cos t}{4\cos^2 t - 1}.$$

Lấy $x = \cos t$ ta được bài toán sau.

Bài 44. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{x}{4x^2-1}$.

Giải

Từ điều kiện $|x|\leqslant 1$, $x\neq\dfrac{1}{2}$ và $x\neq-\dfrac{1}{2}$, ta đặt

$$x=\cos t,\ \ t\in[0;\pi]\,,\, x\neq\frac{\pi}{3},\, x\neq\frac{2\pi}{3}.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{4\cos^2 t-1}\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t-1\right)=\cos t\\
&\Leftrightarrow\sin t\left(4-4\sin^2 t-1\right)=\cos t\Leftrightarrow\sin t\left(3-4\sin^2 t\right)=\cos t\\
&\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t=\cos x\Leftrightarrow\sin 3t=\cos t\Leftrightarrow\sin 3t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\\
&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=\dfrac{\pi}{2}-t+k2\pi\\ 3t=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\ t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).\square
\end{aligned}$$

Trên đoạn $[0;\pi]$, ta nhận được các nghiệm $t_1=\dfrac{\pi}{8}$, $t_2=\dfrac{5\pi}{8}$, $t_3=\dfrac{\pi}{4}$. Nghiệm của phương trình đã cho là $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{5\pi}{8}$, $\cos\dfrac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 37. Ta có $\sin 5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$. Xét $\sin 5t=\cos t$,với $t\in[0;\pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned}
&16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=\cos t\\
&\Leftrightarrow\sin t\left(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5\right)=\cos t\\
&\Leftrightarrow\sin t\left[16\left(1-\cos^2 t\right)^2-20\left(1-\cos^2 t\right)+5\right]=\cos t\\
&\Leftrightarrow\sin t\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=\cos t\\
&\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{16\cos^4 t-12\cos^2 t+1}.
\end{aligned}$$

Lấy $x=\cos t$ ta được bài toán sau.

Bài 45. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{x}{16x^4-12x^2+1}$.

Giải

Từ điều kiện $|x|\leqslant 1$ và $16x^4-12x^2+1\neq 0$, ta đặt

$$x=\cos t,\ t\in[0;\pi]\,,\ 16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\neq 0.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{16\cos^4 t-12\cos^2 t+1}\\
&\Leftrightarrow\sin t\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=\cos t
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2-12\left(1-\sin^2 t\right)+1\right]=\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5\right)=\cos t$$
$$\Leftrightarrow 16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=\cos t \Leftrightarrow \sin 5t=\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sin 5t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3} \\ t=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\square$$

Ví dụ 38. Xét $\sin 5t=\cos 3t$,với $t\in[0;\pi]$, phương trình này tương đương với

$$16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=\cos 3t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5\right)=4\cos^3 t-3\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left[16\left(1-\cos^2 t\right)^2-20\left(1-\cos^2 t\right)+5\right]=4\cos^3 t-3\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=4\cos^3 t-3\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t}\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=4\cos^3 t-3\cos t.$$

Lấy $x=\cos t$ ta được bài toán sau.

Bài 46. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}\,(16x^4-12x^2+1)=4x^3-3x.$

Giải

Từ điều kiện $|x|\leqslant 1$, ta đặt $x=\cos t$, $t\in[0;\pi]$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\sqrt{1-\cos^2 t}\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=4\cos^3 t-3\cos t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2-12\left(1-\sin^2 t\right)+1\right]=\cos 3t$$
$$\Leftrightarrow \sin t\left(16\sin^4 t-20\sin^2 t+5\right)=\cos 3t$$
$$\Leftrightarrow 16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t=\cos 3t \Leftrightarrow \sin 5t=\cos 3t$$
$$\Leftrightarrow \sin 5t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4} \\ t=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\square$$

Ví dụ 39. Từ $\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, với $t\in[0;\pi]$, ta có

$$\sin 3t-\cos 3t=\sin t+\cos t$$
$$\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t-4\cos^3 t+3\cos t=\sin t+\cos t$$
$$\Leftrightarrow 2\cos t+3\sin t-4\sin^3 t=4\cos^3 t+\sin t$$
$$\Leftrightarrow 2\cos t+\sin t\left(3-4\sin^2 t\right)=4\cos^3 t+\sin t$$
$$\Leftrightarrow 2\cos t+\sin t\left(4\cos^2 t-1\right)=4\cos^3 t+\sin t$$
$$\Leftrightarrow 2\cos t+\sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t-1\right)=4\cos^3 t+\sqrt{1-\cos^2 t}.$$

Lấy $x=\cos t$ ta được bài toán sau.

Bài 47. Giải phương trình $2x+(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}=4x^3+\sqrt{1-x^2}.$

Giải

Từ điều kiện $|x| \leqslant 1$, ta đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
& 2\cos t + \left(4\cos^2 t - 1\right)\sqrt{1-\cos^2 t} = 4\cos^3 t + \sqrt{1-\cos^2 t} \\
\Leftrightarrow & 2\cos t + \left(4\cos^2 t - 1\right)\sin t = 4\cos^3 t + \sin t \\
\Leftrightarrow & \sin t\left(4\cos^2 t - 2\right) = 4\cos^3 t - 2\cos t \\
\Leftrightarrow & \sin t\left(2\cos^2 t - 1\right) = \cos t\left(2\cos^2 t - 1\right) \\
\Leftrightarrow & \left(2\cos^2 t - 1\right)(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2t = 0 \\ \sin t = \cos t \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 2t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Bài 48. Giải bất phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leqslant 2 - \dfrac{x^2}{4}$. (1)

Giải

Điều kiện $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Đặt $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} \leqslant 2 - \frac{\cos^2\alpha}{4} \\
\Leftrightarrow & 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow & 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2 - \left[1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow & \cos^4\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^2\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right] \geqslant 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Vì (2) luôn đúng với mọi $\alpha \in [0; \pi]$ nên nghiệm của (1) là $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Sử dụng căn bậc n của số phức để sáng tạo và giải hệ phương trình.

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$. Khi đó các căn bậc n của z là

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

- Các căn bậc hai của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ là

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),\ z_1 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

- Các căn bậc ba của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ là

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \\
z_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right), \\
z_2 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Một phương trình nghiệm phức $f(z) = 0$, với $z = x + iy$, ta biến đổi thành

$$h(x,y) + ig(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Nghĩa là một phương trình nghiệm phức, bằng cách tách phần thực và phần ảo luôn có thể đưa về hệ phương trình.

1. Sáng tác các hệ phương trình bằng cách luỹ thừa ba một số phức cho trước

Để tìm căn bậc ba của số phức $1 + i$, ta tìm số phức $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sao cho

$$(x+iy)^3 = 1 + i \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1 + i$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được x và y, từ đó có z. Tuy nhiên, có thể tìm z bằng cách khai căn bậc ba của $1 + i$ như sau : Ta có

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Vậy các căn bậc ba của $1 + i$ là

$$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Từ đây, ngược lại ta đã tìm được nghiệm của hệ $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$ là

$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{3\pi}{4} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{3\pi}{4} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{17\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{17\pi}{12}. \end{cases}$$

Ví dụ 40. Xét số phức $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Giả sử $x + yi$ là số phức thoả mãn điều kiện

$$(x+yi)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ta được bài toán sau

Bài 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (1) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} & (2). \end{cases}$

Giải

Nhân hai vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta được

$$\begin{aligned} &2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i \\ \Leftrightarrow &x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow &x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow &(x+yi)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right). \end{aligned}$$

Vậy $x + yi$ là một căn bậc ba của số phức

$$z = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Mà z có các căn bậc ba là

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{7\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{7\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{13\pi}{9}. \end{cases} \qquad \square$$

2. Sáng tác các hệ phương trình từ hai số phức cho trước.

Ví dụ 41. Xét hai số phức z_1 và z_2 như sau

$$\begin{cases} z_1 = 7 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \sqrt{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 7 \\ z_1z_2 = 7\sqrt{5}i + 5 \end{cases}$$

Vậy z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i = 0 \Leftrightarrow z - 7 + \frac{5 + 7\sqrt{5}i}{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{5}{z} + \frac{7\sqrt{5}i}{z} = 7 \Leftrightarrow z + \frac{5\overline{z}}{z\overline{z}} + \frac{7\sqrt{5}i\overline{z}}{z\overline{z}} = 7 \end{aligned}$$

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó phương trình trên viết lại

$$\begin{aligned} & x + yi + \frac{5(x - yi)}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}(xi + y)}{x^2 + y^2} = 7 \\ \Leftrightarrow & x + yi + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} i = 7 \\ \Leftrightarrow & x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 + \left(y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} \right) i = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \dfrac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 = 0 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có bài toán sau

Bài 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Ta xét tiếp một bài tương tự:

Bài 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét số phức $z = x + iy$. Khi đó

$$iz = ix - y,\ x^2 + y^2 = |z|^2 = z.\overline{z}$$

Hệ phương trình đã cho viết lại

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (1) \\ yi - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} i = 0. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$x - yi + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} i = 3 \Leftrightarrow x - yi + \frac{3(x + yi)}{x^2 + y^2} - \frac{y - xi}{x^2 + y^2} = 3.$$

Hay

$$\overline{z} + 3\frac{z}{z.\overline{z}} + \frac{iz}{z.\overline{z}} = 3 \Leftrightarrow \overline{z} + 3\frac{1}{\overline{z}} + \frac{i}{\overline{z}} = 3 \Leftrightarrow (\overline{z})^2 - 3\overline{z} + 3 + i = 0.$$

Ta có $\Delta = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i$. Xét số phức $a + bi$ thoả mãn điều kiện

$$-3 - 4i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ b = -\dfrac{2}{a}. \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Vậy $(a; b) = (1; -2)$; $(a; b) = (-1; 2)$. Do đó $\Delta = -3 - 4i$ có hai căn bậc hai là $\pm(1 - 2i)$. Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \overline{z} = \dfrac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ \overline{z} = \dfrac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i. \end{array}\right.$$

Nghĩa là

$$\left[\begin{array}{l} x - yi = 2 - i \\ x - yi = 1 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x; y) = (2; 1) \\ (x; y) = (1; -1). \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$. $\square$

Ví dụ 42. Xét hai số phức

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} - i \\ z_2 = 2\sqrt{2} + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 3\sqrt{2} + i \\ z_1 z_2 = 6. \end{cases}$$

Khi đó z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - \left(3\sqrt{2} + i\right) z + 6 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{6}{z} = 3\sqrt{2} + i \Leftrightarrow z + \frac{6\overline{z}}{z.\overline{z}} = 3\sqrt{2} + i.$$

Giả sử $z = u + vi$, khi đó phương trình viết lại

$$\begin{aligned} & u + vi + \frac{6(u - vi)}{u^2 + v^2} = 3\sqrt{2} + i \\ \Leftrightarrow & u + \frac{6u}{u^2 + v^2} + \left(v - \frac{6v}{u^2 + v^2}\right) = 3\sqrt{2} + i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u + \dfrac{6u}{u^2 + v^2} = 3\sqrt{2} \\ v - \dfrac{6v}{u^2 + v^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(1 + \dfrac{6}{u^2 + v^2}\right) = 3\sqrt{2} \\ v\left(1 - \dfrac{6}{u^2 + v^2}\right) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Lấy $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1 + \dfrac{6}{x + y}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{6}{x + y}\right) = 1. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau

Bài 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1 + \dfrac{6}{x + y}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{6}{x + y}\right) = 1. \end{cases}$

Một bài tương tự đã từng xuất hiện trong kì thi VMO 1996:

Bài 53. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x>0$ và $y>0$. Đặt $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u\left(1+\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1-\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Vì u^2+v^2 là bình phương của môđun của số phức $z=u+iv$ nên ta biến đổi hệ phương trình thành

$$\begin{cases} u+\dfrac{u}{u^2+v^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v-\dfrac{v}{u^2+v^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+\dfrac{u}{u^2+v^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ iv-\dfrac{iv}{u^2+v^2}=\dfrac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}. \quad (3)$$

Vì $\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}}=\dfrac{1}{z}$ nên (3) viết lại

$$z+\frac{1}{z}=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow z^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right)z+1=0. \quad (4)$$

Ta có

$$\Delta'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right)^2-1=\frac{1}{3}-\frac{8}{7}+\frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}-1=-\frac{38}{21}+\frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}.$$

Xét số phức $a+bi$ thoả mãn điều kiện

$$-\frac{38}{21}+\frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}=(a+bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-\dfrac{38}{21} \\ 2ab=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2-\frac{8}{21a^2}=\frac{-38}{21} \Leftrightarrow 21a^4+38a^2-8=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{-19+23}{21}=\frac{4}{21}.$$

Vậy $(a;b)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}};\sqrt{2}\right)$; $(a;b)=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{21}};-\sqrt{2}\right)$. Do đó

$$z=u+iv=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}\right)+\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)i.$$

Vì $u > 0$ và $v > 0$ nên $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{21}} \\ v = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}. \end{cases}$ Do đó

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 = \dfrac{11}{21} + \dfrac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{22}{7} + \dfrac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{21} + \dfrac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \dfrac{22}{7} + \dfrac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases} . \square$$

Bài 54 (VMO 2006)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y + 3x \neq 0$. Đặt $u = \sqrt{3x} \geqslant 0$, $v = \sqrt{y} \geqslant 0$. Thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{u^2+v^2}\right)\dfrac{u}{\sqrt{3}} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{u^2+v^2}\right)v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \dfrac{12u}{u^2+v^2} = 2\sqrt{3} & (1) \\ v + \dfrac{12v}{u^2+v^2} = 6. & (2) \end{cases}$$

Nhân PT (2) với i, sau đó cộng với PT (1) ta được

$$u + vi - \frac{12(u - vi)}{u^2+v^2} = 2\sqrt{3} + 6i. \tag{3}$$

Xét số phức $z = u + vi$, với $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Khi đó (3) viết lại

$$z - \frac{12\overline{z}}{z.\overline{z}} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2(\sqrt{3} + 3i)$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2(\sqrt{3} + 3i)z - 12 = 0. \tag{4}$$

Ta có

$$\Delta' = (\sqrt{3} + 3i)^2 + 12 = -6 + 6\sqrt{3}i + 12 = 6 + 6\sqrt{3}i$$
$$= 12\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy Δ' có hai căn bậc hai là

$$\pm\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \pm\left(3 + \sqrt{3}i\right).$$

Từ (4) ta có

$$\left[\begin{array}{l} z = \sqrt{3} + 3i + 3 + \sqrt{3}i = \sqrt{3} + 3 + \left(3 + \sqrt{3}\right) i \\ z = \sqrt{3} + 3i - 3 - \sqrt{3}i = \sqrt{3} - 3 + \left(3 - \sqrt{3}\right) i. \end{array}\right.$$

Do $u \geqslant 0$ và $v \geqslant 0$ nên

$$\begin{cases} u = \sqrt{3} + 3 \\ v = \sqrt{3} + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}{3} \\ y = \left(\sqrt{3}+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right). \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right). \end{cases}$. □

Sử dụng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Trong đề thi vào Đại học Nông nghiệp 1, năm 1995 có bài toán sau:

Bài 55. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}. \tag{1}$$

Phương trình này khiến ta liên tưởng đến một bất đẳng thức cơ bản trong tam giác : Với mọi tam giác ABC ta có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}, \tag{2}$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Trong vế trái của bất đẳng thức (2), lấy $A = x$, $B = y$, $C = \pi - (x + y)$, ta thu được vế trái của phương trình (1). Lời giải của phương trình (1) cũng thu được dựa trên cơ sở phép chứng minh bất đẳng thức lượng giác (2).

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 - \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos(x + y)\cos(x - y) + 1 - \cos^2(x + y) = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x + y) + \cos(x - y)\cos(x + y) + \frac{1}{4} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Phương trình (3) là phương trình bậc hai đối với $\cos(x + y)$, ta có

$$\Delta = \cos^2(x - y) - 1 \geqslant 0.$$

Vì $\cos^2(x - y) \leqslant 1$ nên để phương trình có nghiệm thì $\cos^2(x - y) = 1$. Do đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = -\dfrac{\cos(x - y)}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x - y) = -1 \\ \cos(x + y) = -\dfrac{\cos(x - y)}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y = k2\pi \\ x + y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + l2\pi. \end{cases} & (5) \end{array}\right.$$

Xét (4) ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=k2\pi; x+y=\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi \\ x-y=k2\pi; x+y=\dfrac{-2\pi}{3}+l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+(k+l)\pi; y=\dfrac{\pi}{3}+(l-k)\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{3}+(k+l)\pi; y=\dfrac{-\pi}{3}+(l-k)\pi \end{array}\right.$$

Xét (5) ta có:

$$(5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi; x+y=\dfrac{\pi}{3}+l2\pi \\ x-y=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi; x+y=\dfrac{-\pi}{3}+l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{12}+(k+l)\pi; y=\dfrac{5\pi}{12}+(l-k)\pi \\ x=\dfrac{-5\pi}{12}+(k+l)\pi; y=\dfrac{\pi}{12}+(l-k)\pi \end{array}\right.$$

Theo trên ta suy ra một hướng để sáng tác một loạt các phương trình lượng giác hai ẩn khá thú vị là : Từ một bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, trong bất đẳng thức đó chứa các góc A, B, C của một tam giác, ta lần lượt lấy

$$A=f(x,y), B=g(x,y), C=\pi-[f(x,y)+g(x,y)],$$

và thay dấu bất đẳng thức bởi dấu đẳng thức, ta sẽ được một phương trình lượng giác hai ẩn x và y tương ứng. Còn việc giải phương trình thì thường được tiến hành tương tự như hai cách giải đã trình bày ở trên.
Chú ý rằng cách làm như trên không phải lúc nào cũng thành công, có thể ta xây dựng được những phương trình lượng giác hai ẩn nhưng ta lại không giải được những phương trình mà ta vừa xây dựng nên. Tuy nhiên đây là một phương pháp sáng tác bài toán rất đáng quan tâm, nó cho ta nhiều phương trình thú vị cả đề bài lẫn lời giải.

Ví dụ 43. Xét bất đẳng thức

$$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. Lấy $A=x$, $B=y$, $C=\pi-(x+y)$, ta được bài toán sau

Bài 56. Giải phương trình

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\left(2\cos^2\frac{x+y}{2}-1\right)=\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & 2\cos^2\frac{x+y}{2}-2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}=0 \\ \Leftrightarrow & \cos^2\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}=0 \\ \Leftrightarrow & \left(\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{x-y}{2}=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \cos\dfrac{x-y}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ví dụ 44. Cũng xét bất đẳng thức

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. Lấy

$$A = x - \frac{y}{2},\ B = \frac{3y}{2},\ C = \pi - \left[\left(x - \frac{y}{2}\right) + \frac{3y}{2}\right] = \pi - (x+y),$$

ta được bài toán sau

Bài 57. Giải phương trình

$$\cos\left(x - \frac{y}{2}\right) + \cos\frac{3y}{2} - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-2y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{x-2y}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-2y}{2} \\ \sin\dfrac{x-2y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-2y}{2} \\ \cos\dfrac{x-2y}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-2y}{2} = 1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \cos\dfrac{x-2y}{2} = -1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Công việc tiếp theo trở nên đơn giản.

Ví dụ 45. Xét bất đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. Lấy $A = 2x$, $B = 2y$, $C = \pi - (2x + 2y)$, ta được bài toán sau

Bài 58. Giải phương trình

$$\sin x + \sin y + \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2} = \frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow &2\sin^2\frac{x+y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{2} = 0\\
\Leftrightarrow &\sin^2\frac{x+y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4} = 0\\
\Leftrightarrow &\left(\sin\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{x-y}{2} = 0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \sin\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin\frac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos\frac{x-y}{2} = \pm 1 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} = 1 \\ \sin\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} = -1 \\ \sin\frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 46. Xét bất đẳng thức

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leqslant \frac{9}{4}, \forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Lấy $A = 2x$, $B = 2y$, $C = \pi - (2x+2y)$, ta được bài toán sau

Bài 59. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2(x+y) = \frac{9}{4}.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \sin^2(x+y) = \frac{9}{4}\\
\Leftrightarrow &1 + \cos(x+y)\cos(x-y) + 1 - \cos^2(x+y) = \frac{9}{4}\\
\Leftrightarrow &\cos^2(x+y) - \cos(x-y)\cos(x+y) + \frac{1}{4} = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2}\cos(x-y) = 0 \\ \cos(x-y) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x-y) = -1 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ví dụ 47. Quan sát các biến đổi trên ta thấy có thể xây dựng nên một số phương trình có lời giải tương tự. Chẳng hạn bài toán sau

> **Bài 60.** Giải phương trình
>
> $$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4}$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow &1 + \cos(x+y)\cos(x-y) + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow &\cos^2(x+y) + \cos(x-y)\cos(x+y) + \frac{1}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow &\left[\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(x+y) = -\frac{1}{2}\cos(x-y) \\ \cos(x-y) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x-y) = -1 \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ví dụ 48. Xét bất đẳng thức

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Lấy

$$A = 2x - y,\ B = 3y,\ C = \pi - [(2x-y) + 3y] = \pi - 2(x+y),$$

ta được bài toán sau

> **Bài 61.**
>
> $$\sin\frac{y-2x}{2}\sin\frac{3y}{2}\cos(x+y) = -\frac{1}{8}.$$

Giải

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&4\left[\cos(x+y)-\cos(2y-x)\right]\cos(x+y)=-1\\
\Leftrightarrow &4\cos^2(x+y)-4\cos(x+y)\cos(2y-x)+1=0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos(x+y)-\cos(2y-x)\right]^2+\sin^2(2y-x)=0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2\cos(x+y)=\cos(2y-x)\\ \sin(2y-x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos(x+y)=\cos(2y-x)\\ \cos(2y-x)=\pm1\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(2y-x)=1\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}\cos(2y-x)=-1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 49. Xét bất đẳng thức

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8},\forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. Lấy

$$A=x,\ B=y,\ C=\pi-(x+y),$$

ta được bài toán sau

Bài 62. Giải phương trình

$$\cos x.\cos y.\cos(x+y)=-\frac{1}{8}.$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&4\cos(x+y)\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]=-1\\
\Leftrightarrow &4\cos^2(x+y)+4\cos(x+y)\cos(x-y)+1=0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]^2+\sin^2(x-y)=0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2\cos(x+y)=-\cos(x-y)\\ \sin(x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos(x+y)=-\cos(x-y)\\ \cos(x-y)=\pm1\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(x-y)=-1\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 50. Xét bất đẳng thức

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2},\forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. Lấy

$$A=x,\ B=y,\ C=\pi-(x+y),$$

ta được phương trình

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Lấy
$$A = 2x - y,\ B = 2y - x,\ C = \pi - [(2x - y) + (2y - x)] = \pi - (x + y)$$
ta được phương trình
$$\cos(2x - y) + \cos(2y - x) - \cos(x + y) = \frac{3}{2}. \quad (2)$$
Cộng (1) và (2) ta được bài toán sau

Bài 63. Giải phương trình
$$\cos x + \cos y + \cos(2x - y) + \cos(2y - x) = 3 + 2\cos(x + y).$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương
$$\begin{aligned}
&[\cos x + \cos(2y - x)] + [\cos y + \cos(2x - y)] = 3 + 2\cos(x + y)\\
\Leftrightarrow &2\cos y\cos(x - y) + 2\cos x\cos(x - y) = 3 + 2\cos(x + y)\\
\Leftrightarrow &2\cos(x - y)(\cos x + \cos y) = 3 + 2\cos(x + y)\\
\Leftrightarrow &4\cos(x - y)\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = 3 + 4\cos^2\frac{x + y}{2} - 2\\
\Leftrightarrow &4\cos^2\frac{x + y}{2} - 4\cos(x - y)\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} + 1 = 0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos\frac{x + y}{2} - \cos(x - y)\cos\frac{x - y}{2}\right]^2 + 1 - \cos^2(x - y)\cos^2\frac{x - y}{2} = 0. \quad (1)
\end{aligned}$$
Vì $1 - \cos^2(x - y)\cos^2\frac{x - y}{2} \geqslant 0$ nên
$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow &\begin{cases} 2\cos\frac{x + y}{2} - \cos(x - y)\cos\frac{x - y}{2} = 0\\ 1 - \cos^2(x - y)\cos^2\frac{x - y}{2} = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 2\cos\frac{x + y}{2} - \cos(x - y)\cos\frac{x - y}{2} = 0\\ 1 - \cos^2(x - y)\frac{1 + \cos(x - y)}{2} = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 2\cos\frac{x + y}{2} - \cos(x - y)\cos\frac{x - y}{2} = 0\\ \cos^2(x - y) + \cos^3(x - y) = 2\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ 2\cos\frac{x + y}{2} = \cos\frac{x - y}{2}\end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$
Vì $\cos(x - y) = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x - y}{2} - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{x - y}{2} = 1$ nên
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ 2\cos\frac{x + y}{2} = \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ \cos\frac{x + y}{2} = \pm\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ \cos^2\frac{x + y}{2} = \frac{1}{4}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ 1 + \cos(x + y) = \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1\\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Sử dụng hàm ngược để sáng tác một số phương trình, hệ phương trình.

Đây là một phương pháp để sáng tác và giải phương trình, hệ phương trình khá hay. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược là $y = g(x)$. Nếu vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc thì hai đồ thị ấy đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất. Do đó nếu hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược là $y = g(x)$ thì việc giải phương trình $f(x) = g(x)$ quy về giải phương trình $f(x) = x$ (hoặc $g(x) = x$). Tóm lại, trong một số trường hợp ta sử dụng mệnh đề sau.

Mệnh đề. Cho $y = f(x)$ là hàm đồng biến, có hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ và tập xác định của phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$ bằng $D_f \cap D_{f^{-1}}$. Ta có phép biến đổi sau

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases} \quad (1)$$

hoặc

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}}. \end{cases} \quad (2)$$

Như vậy việc giải phương trình $f(x) = f^{-1}(x)$ ta thay thế được bởi các hệ phương trình tương đương (1) hoặc (2).

Chứng minh.

• Giả sử $f(x) = f^{-1}(x)$. Khi đó $x = f(f(x))$. Nếu $x > f(x)$ thì do f đồng biến nên $f(x) > f(f(x)) \Rightarrow f(x) > x$ (vô lí). Nếu $x < f(x)$, tương tự ta cũng suy ra vô lí. Vậy $x = f(x)$.

• Giả sử $x = f(x)$ và $x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$. Khi đó $\begin{cases} x = f^{-1}(x) \\ x = f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$.

Vậy (1) được chứng minh.

Chú ý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có hàm ngược $y = f^{-1}(x)$. Khi đó f đồng biến $\Leftrightarrow$ f^{-1} đồng biến.

Chú ý 2. Nếu hàm số f liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại hàm số ngược f^{-1}.

Ví dụ 51. Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ trên $(-1; +\infty)$. Hàm số ngược của $f(x)$ là $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1$ xác định trên $(-3; +\infty)$. Khi đó

$$2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}.$$

Ta có bài toán sau.

Bài 64 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2007)**.** Giải phương trình

$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}, \text{ với } x \geqslant -1. \quad (*)$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant -1$ (giả thiết).

Cách 1. Xét hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1, \forall x \in [-1; +\infty)$. Khi đó

$$y+1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -1 \\ y^2+2y+1 = \dfrac{x+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant -1 \\ x = 2y^2+4y-1. \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = 2x^2+4x-1$ là hàm ngược của hàm $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1$ trên $[-1; +\infty)$. Mặt khác hàm số $y = 2x^2+4x-1$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$ nên

$$2x^2+4x-1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1 \Leftrightarrow 2x^2+4x-1 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ là nghiệm duy nhất của (*). □

⊛ Nhận xét: Vì sao lại tìm hàm ngược của hàm $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1, \forall x \in [-1; +\infty)$? Đó là do ta giả sử

$$ay+b = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \Rightarrow a^2y^2+2aby+b^2 = \frac{x+3}{2} \Rightarrow x = 2a^2y^2+4aby+2b^2-3.$$

So sánh với phương trình đã cho thấy rằng cần chọn a, b sao cho

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 4ab = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy nên ta mới xét hàm số $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1, \forall x \in [-1; +\infty)$. Ngoài ra ta còn có thể giải thích như sau: Từ phương trình đã cho thấy rằng cần xét hàm số có tập giá trị là $[-1; +\infty)$ và có dạng $y = a\sqrt{\dfrac{x+3}{2}} - 1$ $\left(\text{với } a > 0\right)$. Khi đó

$$y^2+2y+1 = a^2.\frac{x+3}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{a^2}y^2 + \frac{4}{a^2}y + \frac{2}{a^2} - 3$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{a^2}; \frac{4}{a^2}\right) = (2; 4) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1.$$

Cách 2. Đặt $y+1 = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$, điều kiện $y \geqslant 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} (y+1)^2 = \dfrac{x+3}{2} \\ 2x^2+4x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+4y = x+1 & (1) \\ 2x^2+4x = y+1. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y^2-x^2)+4(y-x) = x-y \Leftrightarrow 2(y-x)(y+x)+5(y-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x = 0 \\ 2(y+x)+5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{-5-2x}{2}. \end{array}\right.$$

• Khi $y = x$, thay vào (2) ta được

$$2x^2 + 4x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \text{ (loại).} \end{array} \right.$$

• Khi $y = -\dfrac{5+2x}{2}$, thay vào (2) ta được

$$4x^2 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}. \end{array} \right.$$

Với $x = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}$ ta có

$$y = -\frac{5+2x}{2} = -\frac{5+\sqrt{13}}{4} < 0 \text{ (không thoả mãn } y \geqslant 0)$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ là nghiệm duy nhất của (*). □

Ví dụ 52. Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên $\left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Hàm số ngược của $f(x)$ là $y = f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{9+4x}}{2}$ xác định trên $\left[-\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$. Khi đó

$$\frac{3+\sqrt{9+4x}}{2} = x^2 - 3x \Leftrightarrow \sqrt{9+4x} = 2x^2 - 6x - 3.$$

Ta có bài toán sau.

Bài 65. Giải phương trình $\sqrt{9+4x} = 2x^2 - 6x - 3.$ (*)

Giải

Điều kiện $x \geqslant -\dfrac{9}{4}$. Đặt $2y - 3 = \sqrt{9+4x}$, điều kiện $y \geqslant \dfrac{3}{2}$. Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} (2y-3)^2 = 9 + 4x \\ 2y - 3 = 2x^2 - 6x - 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y^2 - 12y = 4x \\ 2x^2 - 6x = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2y^2 - 6y = 2x & (1) \\ 2x^2 - 6x = 2y & (2) \end{array} \right.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y^2 - x^2) - 6y + 6x = 2x - 2y \Leftrightarrow 2(y^2 - x^2) + 4(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x)(y + x - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 2 - x. \end{array} \right.$$

• Khi $y = x$, thay vào (1) ta được

$$2x^2 - 6x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array} \right.$$

Khi $x = 0$ thì $y = 0$ (loại). Khi $x = 4$ thì $y = 4$.
• Khi $y = 2 - x$, thay vào (2) ta được

$$x^2 - 3x = 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = 1 - \sqrt{3}$, không thoả mãn điều kiện.
Khi $x = 1 - \sqrt{3}$ thì thế vào phương trình đã cho thấy thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 4$, $x = 1 - \sqrt{3}$. □
⊛ Nhận xét: Phương trình $(*)$ có tập xác định là $\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$, trong khi đó ta có $D_f \cap D_{f^{-1}} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, vì vậy (*) nhận $x = 1 - \sqrt{3}$ làm nghiệm là điều dễ hiểu, vì giải phương trình (*) là tìm x thuộc tập xác định $\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$ và thoả mãn (*).

Ví dụ 53. Hàm số $y = \sqrt[3]{x+3}$ là hàm số ngược của hàm số $y = x^3 - 3$ trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có bài toán sau.

Bài 66. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+3} = x^3 - 3$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.
Đặt $y = \sqrt[3]{x+3}$. Khi đó ta có hệ $\begin{cases} y^3 = x + 3 & (1) \\ x^3 = y + 3 & (2) \end{cases}$
Lấy (2) trừ (1) theo vế ta được $x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow x^3 + x = y^3 + y$. (3)
Xét $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Do đó

$$x^3 = x + 3 \Leftrightarrow x^3 - x = 3 \quad (4)$$

Giả sử $x = \frac{2}{\sqrt{3}}t$, thay vào (4) ta được

$$4t^3 - 3t = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Để cho gọn, kí hiệu $m = \frac{9\sqrt{3}}{2} > 1$. Xét

$$m = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) \Leftrightarrow \left(\alpha^3\right)^2 - 2m\alpha^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}.$$

Do đó, nếu đặt $\alpha = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{239}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3} + \sqrt{239}}{2}}$ thì

$$m = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right), \frac{1}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3} - \sqrt{239}}{2}}.$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Vậy

$$t_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}+\sqrt{239}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{239}}{2}}\right)$$

là một nghiệm của phương trình (5). Ta sẽ chứng minh t_0 là nghiệm duy nhất của phương trình. Ta có $|t_0| > 1$ và

$$4t^3 - 3t = 4t_0^3 - 3t_0 \Leftrightarrow (t - t_0)(4t^2 + 4t_0 t + 4t_0^2 - 3) = 0.$$

Để ý rằng phương trình $4t^2 + 4t_0 x + 4t_0^2 - 3 = 0$ vô nghiệm do

$$\Delta' = 4t_0^2 - 4(4t_0^2 - 3) = 12 - 12t_0^2 = 12(1 - t_0^2) < 0 \text{ (vì } t_0^2 > 1).$$

Vậy $t = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2-1}}\right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (5). Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}+\sqrt{235}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{235}}{2}}\right). \square$$

Bài 67. Cho trước số thực a. Giải phương trình (ẩn là x)

$$a^{2011} + x = \sqrt[2011]{a - x}.$$

Giải

Tập xác định $\mathbb{R}$. Xem a như ẩn số. Xét hàm $y = f(a) = a^{2011} + x$. Ta có

$$y = a^{2011} + x \Leftrightarrow a^{2011} = y - x \Leftrightarrow a = \sqrt[2011]{y - x}.$$

Vậy hàm số $y = \sqrt[2011]{a - x}$ là hàm ngược của hàm $y = a^{2011} + x, \forall a \in \mathbb{R}$. Mặt khác vì $(a^{2011} + x)' = 2011a^{2010} \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}$ nên $y = a^{2011} + x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$$a^{2011} + x = \sqrt[2011]{a - x} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2011} + x = a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = a - a^{2011}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = a - a^{2011}$.

SÁNG TÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Để giải hệ phương trình thì phương pháp thế và phương pháp cộng là thường dùng nhất, là phương pháp cơ bản nhất. Từ bài học "vỡ lòng" về hệ phương trình đã có phương pháp này. Tuy nhiên phương pháp này vẫn thường xuất hiện ở những kì thi lớn, những kì thi chỉ dành cho những học sinh xuất sắc. Đã có nhiều tài liệu về hệ phương trình đề cập đến phương pháp này, do vậy sau đây ta chỉ trình bày một số bài toán khó và đi sâu hơn vào việc phân tích kỹ thuật giải cũng như kĩ thuật sáng tác.

Bài 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)\, y^2 z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2 + y + 1)\, z^2 x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + y + 1)\, x^2 y^2. \end{cases}$

Giải

Dễ thấy rằng $(x;0;0)$, $(0;y;0)$, $(0;0;z)$ thoả mãn hệ đã cho. Tiếp theo xét $xyz \neq 0$. Khi đó chia các phương trình của hệ cho $x^2y^2z^2$ ta được

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2 = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{zy}+\dfrac{1}{y^2} = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{zx}+\dfrac{1}{z^2} = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2} = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}. \end{cases}$$

Cộng lại ta được

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = -3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 4. \end{array}\right.$$

• Với $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = -3$, ta được

$$\begin{cases} \left(3+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(3+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(3+\dfrac{1}{z}\right)^2 = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x} = -6 \\ \dfrac{5}{y} = -5 \\ \dfrac{5}{z} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} \\ y = -\dfrac{5}{5} \\ z = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

• Với $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 4$, ta được

$$\begin{cases} \left(4-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(4-\dfrac{1}{y}\right)^2 = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(4-\dfrac{1}{z}\right)^2 = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{x} = 13 \\ \dfrac{9}{y} = 12 \\ \dfrac{9}{z} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{13} \\ y = \dfrac{9}{12} \\ z = \dfrac{9}{11}. \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ là

$$(x;y;z) = \left(-\frac{5}{6};-1;-\frac{5}{4}\right),\ (x;y;z) = \left(\frac{9}{13};\frac{3}{4};\frac{9}{11}\right),$$
$$(a;0;0),\ (0;b;0),\ (0;0;c)\ \big(\text{với } a,b,c \in \mathbb{R}, \text{ tuỳ ý}\big). \ \square$$

Bài 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y-z) = -\dfrac{5}{3} & (1) \\ y^2(z-x) = 3 & (2) \\ z^2(x-y) = \dfrac{1}{3}. & (3) \end{cases}$

Giải

Ta có hằng đẳng thức sau :

$$\left(x^2y^2 - x^2z^2\right) + \left(z^2y^2 - x^2y^2\right) + \left(x^2z^2 - y^2z^2\right) = 0.$$

Từ đó nhân (1) với $y+z$, nhân (2) với $z+x$, nhân (3) với $x+y$ ta được

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{3}(y+z) + 3(z+x) + \frac{1}{3}(x+y) = 0 \\ \Leftrightarrow & -5y - 5z + 9z + 9x + x + y = 0 \\ \Leftrightarrow & 4y = 10x - 4z \Leftrightarrow y = \frac{5x+2z}{2} \Rightarrow y - z = \frac{5x}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4), (1) được $\frac{5x}{2} = -\frac{5}{3x^2}$, suy ra x, thế vào (2), (3) được hệ hai ẩn. Công việc tiếp theo trở nên đơn giản.

Bài 70. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xz + y = 7z & (1) \\ yz + x = 8z & (2) \\ x + y + z = 12. & (3) \end{cases}$

Giải

Từ (1) có $y = 7z - zx$. Thay vào (2) và (3) được

$$\begin{cases} (7z - zx)z + x = 8z \\ x + (7z - zx) + z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 - z^2\right) = 8z - 7z^2 & (4) \\ x(1 - z) = 12 - 8z. & (5) \end{cases}$$

Rõ ràng $z = 1$ không thoả (5), do đó (5) $\Leftrightarrow x = \frac{12 - 8z}{1 - z}$. Thay vào (4) được

$$(12 - 8z)(1 + z) = 8z - 7z^2 \Leftrightarrow z^2 + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -6. \end{array}\right.$$

Với $z = 2$ ta được $x = 4$, $y = 6$. Với $z = -6$ ta được $x = \frac{60}{7}$, $y = \frac{66}{7}$.

Kết luận: hệ có hai nghiệm $(4; 6; 2)$, $\left(\frac{60}{7}; \frac{66}{7}; -6\right)$. □

Bài 71 (HSG tỉnh Quảng Bình, năm học 2010-2011)**.** Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x - y - 1} = 1 & (1) \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0. & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant 0$ và $x - y - 1 \geqslant 0$. Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} = \sqrt{x - y - 1} + 1 \Leftrightarrow x = x - y + 2\sqrt{x - y - 1} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x - y - 1} \\ \Leftrightarrow & y^2 = 4(x - y - 1) \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 4x \Leftrightarrow y + 2 = 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{x}\right)^2 = xy^2 \Leftrightarrow y + \sqrt{x} = \pm y\sqrt{x}.$$

Ta thu được $\begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ y+\sqrt{x}=\pm y\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ 2y+(y+2)=\pm(y+2)\,y. \end{cases}$

Từ đó tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)=\left(\frac{1}{4};-1\right),(4;2),\left(\frac{9-\sqrt{17}}{8};\frac{\sqrt{17}-5}{2}\right)$. □

Bài 72. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 4x^2+y^4-4xy^3=1 & (1) \\ 4x^2+2y^2-4xy=2. & (2) \end{cases}$$

Giải

Lấy (1) trừ (2), vế theo vế, ta được :

$$y^4-2y^2-4xy^3+4xy+1=0 \Leftrightarrow \left(y^2-1\right)^2-4xy\left(y^2-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2-1-4xy\right)=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ hoặc } y=-1 \text{ hoặc } y^2-1+4xy=0.$$

• Nếu $y=1$, thay vào phương trình (1) ta được :

$$4x^2+1-4x=1 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=1.$$

• Nếu $y=-1$, thay vào phương trình (1) ta được :

$$4x^2+1+4x=1 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-1.$$

• Nếu $y^2-1+4xy=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{4y}$ (dễ thấy trong trường hợp này $y\neq 0$), thay vào phương trình đầu tiên ta được:

$$4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)^2+y^4-4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)y^3=1$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)^2+4y^6-4y^4\left(1-y^2\right)=4y^2$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)^2-4y^4\left(1-y^2\right)=4y^2\left(1-y^4\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)\left[\left(1-y^2\right)-4y^4-4y^2\left(1+y^2\right)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left(1-y^2\right)\left[8y^4+5y^2-1\right]=0$$

Công việc đến đây trở nên đơn giản.

⊛ Nhận xét: Đây là một dạng hệ phương trình đa thức khá khó, rõ ràng nếu phương trình thứ hai, người ta chia hai vế cho 2 thì khó có thể nhận biết giá trị này mà nhân vào rồi trừ từng vế như trên. Việc phát hiện ra giá trị 2 để nhân vào có thể dùng cách đặt tham số phụ rồi lựa chọn.

Bài 73. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3x-x^4=28 \\ xy^2+2x^2y+x^3=18\sqrt{2} \end{cases}$

Giải

Ta biến đổi tương đương

$$\begin{cases} x(y^3-x^3)=28 & (1) \\ x(y+x)^2=18\sqrt{2}. & (2) \end{cases}$$

Suy ra để $(x; y)$ là nghiệm thì $y > x > 0$. Từ (2), rút y theo x và thế vào (1) có

$$x\left[\left(\frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{x}} - x\right)^3 - x^3\right] = 28. \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ $(t > 0)$ và (3) thành :

$$t^9 - (3\sqrt[4]{8} - t^3)^3 + 28t = 0. \quad (4)$$

Xét hàm $f(t) = t^9 - (3\sqrt[4]{8} - t^3)^3 + 28t$, với $t > 0$.
Ta có $f'(t) > 0$ với mọi $t > 0$.
Chứng tỏ hàm f đồng biến trên $(0; +\infty)$, nên (4) có nghiệm thì nghiệm đó duy nhất.
Từ đó hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì nghiêm đó là duy nhất. Dễ thấy $y = 2x$ thì từ (1), ta có: $x^4 = 4$ hay $x = \sqrt{2}$. Suy ra $y = 2\sqrt{2}$.
Thử lại $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ thỏa mãn (2).
Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. □

KINH NGHIỆM GIẢI MỘT SỐ BÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Khi giải hệ phương trình, dù có dùng cách gì biến đổi đi chăng nữa thì mục đích cuối cùng của ta cũng chuyển về phương trình một biến và giải phương trình vừa thu được. Đó cũng là suy nghĩ tự nhiên, việc làm giảm biến là quy luật không chỉ trong toán học mà cả trong cuộc sống chúng ta vẫn thường làm. Tóm lại, khi giải hệ phương trình thì chúng ta phải tìm cách làm giảm số ẩn của hệ để thuận lợi trong việc giải nó. Sau đây là một số kinh nghiệm mà nhóm biên soạn thu được trong quá trình học tập và giảng dạy, xin được chia sẻ cùng bạn đọc.

Nếu trong phương trình của hệ mà có một ẩn xuất hiện dưới dạng bậc nhất, thì ta có thể rút ẩn đó theo ẩn còn lại và thế vào phương trình thứ hai của hệ và phương trình thu được có bậc không nhỏ nhưng ý tưởng giải là rất rõ ràng.

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$

Giải

⁎ **Cách 1:**
Vì phương trình thứ nhất của hệ chứa nhiều y nên ta nghĩ đến việc rút y theo x và thế vào phương trình thứ hai của hệ.
Ta có $y = \dfrac{2x^2(2-x)}{x+1}$ (do $x = -1$ không là nghiệm của hệ).

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$x^4\left(5-4x^2\right)=\frac{4x^4(2-x)^2}{(x+1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(5-4x^2)(x^2+2x+1)=4(4-4x+x^2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^4+8x^3+3x^2-26x+11=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\x=1\Rightarrow y=1\\x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(0;0),\ (1;1),\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Cách giải này có một ưu điểm là không cần phải mánh khóe gì cả mà chỉ cần biến đổi hết sức bình thường. Tuy nhiên, nó có một nhược điểm là nó chỉ giúp chúng ta giải quyết bài toán đó thôi, còn con đường để sáng tác ra bài toán đó thì cách giải trên không thể làm rõ được. Để hiểu rõ được nguồn gốc của bài toán và đó là cách mà tác giả đã sáng tác bài toán trên, ta cùng xem qua cách giải sau:

⋇ Cách 2:

Ta viết lại hệ như sau:

$$\begin{cases}2x^3+y(x+1)=4x^2\\y^2+4x^6=5x^4\end{cases}$$

Nhận thấy $x=0\Rightarrow y=0$, hay $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Với $x\neq 0$ ta có hệ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\dfrac{y}{x^2}(x+1)=4\\\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2+4x^2=5\end{cases}$$

Đặt $a=2x, b=\dfrac{y}{x^2}$ ta có được hệ:

$$\begin{cases}a+b\left(\dfrac{a}{2}+1\right)=4\\a^2+b^2=5\end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I. Việc giải hệ này không mấy khó khăn.

⊛ Nhận xét: Qua lời giải trên, ta thấy con đường để chế tác ra những hệ kiểu này là xuất phát từ một hệ đã biết thuật giải, chúng ta thay thế hình thức của các biến có mặt trong hệ và biến đổi rút gọn ta thu được một hệ có hình thức hoàn toàn xa lạ với cái hệ ban đầu.

Chẳng hạn: Từ hệ $\begin{cases}x+y+xy=5\\x^2+y^2=5\end{cases}$ (lưu ý hệ này có nghiệm $(1;2)$)

Ta thay thế x bằng $\dfrac{y}{2x^3}$ và y bằng y^2 thì ta có hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{y}{2x^3}+y^2+\dfrac{y^3}{2x^3}=5\\\dfrac{y^2}{4x^6}+y^4=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(y^2+2x^3y+1)=10x^3\\y^2(1+4x^6y^2)=20x^6\end{cases}$$

Vậy ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y(y^2+2x^3y+1)=10x^3 \\ y^2(1+4x^6y^2)=20x^6 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \ (1) \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \ (2) \end{cases}$

Giải

Nhận thấy phương trình thứ nhất của hệ là phương trình bậc nhất đối với x nên ta rút x theo y và thế vào phương trình thứ hai để được phương trình một ẩn.
Từ (1) suy ra $y=\dfrac{x^2+x}{2x-1}$ (do $x=\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của hệ), thay vào (2) ta được

$$x^4-4x^2\frac{x^2+x}{2x-1}+3x^2+\left(\frac{x^2+x}{2x-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$$

Với $f(x)=x^2(2x-1)^2-4(x^2+x)(2x-1)+3(2x-1)^2+(x+1)^2=4x^4-12x^3+10x^2-6x+4$
Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow 2x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x^2+1)=0\Leftrightarrow x=1, x=2$
Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$ □
⊛ Nhận xét: Cũng như ở ví dụ 1, cách giải trên chỉ giải quyết được bài toán chứ không phải là con đường để sáng tác bài toán đó. Điều này thôi thúc chúng ta đi tìm một lời giải khác cho bài toán trên. Sự xuất hiện x^2-2xy và x^4-4x^2y gợi cho ta nghĩ đến các hằng đẳng thức. Vậy ta thử viết lại hệ như sau:

$$\begin{cases} (x-y)^2+x+y-y^2=0 \\ (x^2-y)^2+3x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

Việc làm này cũng không mấy khả quan, vì khi nhìn vào hệ chúng ta cũng chưa phát hiện được mối liên hệ nào. Theo cách làm ở ví dụ 1 ta biến đổi:
Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ là nghiệm của hệ.
Nếu $x\neq 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} x-2y+1+\dfrac{y}{x}=0 \\ x^2-4y+\dfrac{y^2}{x^2}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2y+1 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2=6y-3 \end{cases}$$

Suy ra $(2y+1)^2=6y-3$. Đến đây thì bài toán trở nên đơn giản.
Với cách giải trên, ta có thể tạo ra được rất nhiều hệ phương trình khác nhau. Ở đây chúng ta chú ý rằng việc giải hệ cuối cùng quy về giải các phương trình bậc hai nên chuyện các hệ số nhận những giá trị nào không quan trọng.
Chẳng hạn từ hệ $\begin{cases} x+\dfrac{2y}{x}=4x^2+4 \\ \left(x+\dfrac{2y}{x}\right)^2=x^2-3 \end{cases}$ qua khai triển ta có hệ $\begin{cases} 2y=4x^3-x^2+4x \\ 4x^2y+4y^2=-3x^2 \end{cases}$

Ở hai bài trên chúng ta giải theo phương pháp thế. Dấu hiệu nhận thấy là việc xuất hiện của một phương trình là phương trình bậc nhất đối với một ẩn. Bây giờ chúng ta chuyển qua xét một số hệ mà chúng ta thực hiện rút thế mà phương trình đối với một ẩn trong một phương

trình nào đó không phải là phương trình bậc nhất.

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \ (1) \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \ (2) \end{cases}$

Giải

⋇ **Cách 1:**
Từ (2) ta suy ra: $x^2 = 3(y^2 + 2)$ (3) , thay vào (1) ta được:

$$x^3 - 8x = y(y^2 + 2) = \frac{yx^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right.$$

• Nếu $x = 0$ thay vào (3) ta thấy phương trình vô nghiệm.
• Nếu $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được

$$x^2 = 3\left(\frac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6 \Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm là: $(x; y) = (\pm 3; \pm 1)$, $\left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{14}}; \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$ □

⊛ Nhận xét: Chúng ta nghĩ đến phép thế do phương trình thứ nhất chỉ chứa y^3 và y; ở phương trình thứ hai của hệ lại chứa y^2 nên nếu ta thay y^2 vào phương trình thứ nhất thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành phương trình bậc nhất đổi với ẩn y và ta thực hiện rút y như trên. Tuy nhiên, có lẽ đây cũng không phải là con đường chế tác bài toán trên. Từ nhận xét trên, ta thấy ở phương trình thứ nhất hai biến x, y lệch bậc nhau 2 bậc (x^3 và x; y^3 và y), đồng thời phương trình thứ hai cũng lệch bậc nhau 2 bậc (x^2, y^2 và hằng số).
Điều này gợi ý ta tạo ra sự đồng bậc như sau:

⋇ **Cách 2:**
Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ 6 = x^2 - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow 6(x^3 - y^3) = (8x + 2y)(x^2 - 3y^2)$$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 3. Việc còn lại để giải quyết hệ không còn khó khăn nữa.

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \ (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \ (2) \end{cases}$

Giải

Bài toán này đã có hai cách giải bằng hệ số bất định và ẩn phụ tổng - hiệu. Sau đây ta cùng xem qua hai cách giải khác:

⋇ Cách 1:
Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ nên từ (1) suy ra $y^2 = -\dfrac{x^3+49}{3x}$ $(*)$
Thế vào phương trình (2) ta được

$$x^2 - 8xy - \frac{x^3+49}{3x} = 8y - 17 \Leftrightarrow 24y(x^2+x) = 2x^3 + 51x^2 - 49$$

$$\Leftrightarrow 24xy(x+1) = (x+1)(2x^2+49x-49) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \dfrac{2x^2+49x-49}{24x} \end{array}\right.$$

• Nếu $x = -1$ thế vào (*) $\Rightarrow y = \pm 4$.
• Nếu $y = \dfrac{2x^2+49x-49}{24x}$ thế vào (*), ta có:

$$-\frac{x^3+49}{3x} = \left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2 \Leftrightarrow -192x(x^3+49) = (2x^2+49x-49)^2$$

Biến đổi rút gọn ta được:

$$4x^4 + 4x^3 + 45x^2 + 94x + 49 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2 - 4x + 49) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (-1; \pm 4)$ □

⋇ Cách 2:
Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$.
Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^3(1+3t^2) = -49 \\ x^2(1-8t+t^2) = x(8t-17) \end{cases}$$

Ta viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{-49}{1+3t^2} = \dfrac{-49}{49+3(t^2-16)} = \dfrac{-49}{49+3a} \\ x = \dfrac{8t-17}{t^2-8t+1} = \dfrac{8t-17}{(t^2-16)-(8t-17)} = \dfrac{b}{a-b} \end{cases} \text{với } a = t^2 - 16; b = 8t - 17$$

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a} = \frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3 + (a-b)^3\right) + 3ab^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left[49\left(b^2 - b(a-b) + (a-b)^2\right) + 3b^3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 49\left(b^2 - b(a-b) + (a-b)^2\right) + 3b^3 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

• Với $a = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16$, thay vào hệ ta có $x = -1 \Rightarrow y = \pm 4$.
• Xét (*), khai triển và rút gọn, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 49t^4 + 360t^3 + 547t^2 - 360t + 304 = 0 \Leftrightarrow (t+4)^2(49t^2 - 32t + 19) = 0 \Leftrightarrow t = -4$$

⊛ Nhận xét: Hai cách giải trên đòi hỏi tính toán nhiều, và chưa thể nói lên ý tưởng của người ra đề. Đối với bài này cách giải hay nhất là dùng hệ số bất định (đã được đề cập trong chương Hệ phương trình). Xuất phát từ nghiệm $x = -1$, ta sẽ tạo ra các phương trình chứa nhân tử $(x+1)$, từ đó khai triển để được một hệ mới. Ví dụ như hai bài sau:

Bài 4*: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 5 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 4x + y \end{cases}$

Bài 4:** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^2 = (x-y)(xy-1) \\ x^3 - x^2 + y + 1 = xy(x - y + 1) \end{cases}$

Bài 5: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$

Giải

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên hệ tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^3} + y^3 = 19 \\ y\dfrac{1}{x^2} + y^2\dfrac{1}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + y^3 = 19 \\ a^2y + y^2a = -6 \end{cases} \text{(với } a = \frac{1}{x}\text{)}$$

Đặt $S = a + y, P = ay$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} S(S^2 - 3P) = 19 \\ SP = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (\frac{1}{3}; -2),\ (-\frac{1}{2}; 3)$ □

⊛ Nhận xét: Ngoài cách giải trên, ta có thể giải theo cách sau:

Do $x = 0$ không là nghiệm của hệ, ta viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} 6(1+xy)(1 - xy + x^2y^2) = 6.19x^3 \\ 19xy(1+xy) = -19.6x^2 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ lại ta được: $(1+xy)(6x^2y^2 + 13xy + 25) = 0$ Đến đây, bài toán trở nên đơn giản.

⊛ Nhận xét:Cùng ý tưởng đó, ta có bài toán sau:

Bài 5*: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+1)y^4 + 1 = 2xy^2(y^3 - 1) \\ xy^2(3xy^4 - 2) = xy^4(x + 2y) + 1 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2y^4 + 2xy^2 + 1 + y^4 - 2xy^5 = 0 \\ 3x^2y^6 - 2xy^2 - x^2y^4 - 2xy^5 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y^4} - 2xy = -1 \\ 3x^2y^2 - \dfrac{2x}{y^2} - x^2 - 2xy - \dfrac{1}{y^4} = 0 \text{ (do y=0 không là nghiệm của hệ)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y^2}\right)^2 - 2xy = -1 \\ 3x^2y^2 - 2xy - \left(x + \dfrac{1}{y^2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{y^2}, b = xy$, ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 - 2b = -1 \\ a^2 - 3b^2 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b - 1 \\ 3b^2 - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$$

• Nếu $a = b = 1 :\Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y^2} = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{y} \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

• Nếu $a = -1; b = 1 :\Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y^2} = -1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{y} \\ y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$ □

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2 - 1\right)^2 + 3 = \dfrac{6x^5y}{x^2 + 2} \\ 3y - x = \sqrt{\dfrac{4x - 3x^2y - 9xy^2}{x + 3y}} \end{cases}$

Giải

Từ phương trình thứ hai, ta có $\begin{cases} 3y \geqslant x \\ x + 3y \neq 0 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2) = 6x^5y \\ (3y - x)^2 = \dfrac{4x - 3x^2y - 9x^2y^2}{x + 3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ 9y^2 - 6xy + x^2 = \dfrac{4x}{x + 3y} - 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ (x^2 - 3xy + 9y^2)(x + 3y) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5y \\ x^3 + 27y^3 = 4x \end{cases}$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ, nên ta có

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{8}{x^6} = \dfrac{6y}{x} \\ 1 + \dfrac{27y^3}{x^3} = \dfrac{4}{x^2} \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{2}{x^2} > 0,\ b = \dfrac{3y}{x}$, ta thu được hệ

$$\begin{cases} 1 + a^3 = 2b \\ 1 + b^3 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^3 = 2b \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^3 - 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a-1)(a^2 + a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 1, a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

• Với $a = b = 1$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = 1 \\ \dfrac{3y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

• Với $a = b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \dfrac{3y}{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} x = -\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y = -\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\pm\sqrt{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right),\ \left(-\sqrt{\sqrt{5}+1}; -\dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}\right)$ □

Bài 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^4 - \left(x^3 - x\right)y^2 - (y+12)\,x^2 = -6 \\ 5x^4 - \left(x^2 - 1\right)^2 y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$

Giải

Nhận thấy, $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên chia hai vế của mỗi phương trình cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} 6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)y^2 - y - 12 = 0 \\ 5\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 y^2 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)y^2 - y = 0 \\ 5\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x - \dfrac{1}{x}$, ta có hệ

$$\begin{cases} 6a^2 - ay^2 - y = 0 \\ 5a^2 - a^2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Chia hai vế của hệ cho $a^2 \neq 0$ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a} + \dfrac{y}{a^2} = 6 \\ y^2 + \dfrac{1}{a^2} = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{1}{a}$, ta có hệ

$$\begin{cases} y^2u + u^2y = 6 \\ u^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy(u+y) = 6 \\ (u+y)^2 - 2uy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + y = 3 \\ uy = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được: $\begin{cases} u = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

• Với $u = 1 \Rightarrow a = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

• Với $u = 2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2\right), \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1\right)$ □

Bài tập tự luyện

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + \sqrt{x - y} = 8 \\ y\sqrt{x - y} = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y \geqslant 4 \\ (x^4 + y^4)(x^7 + y^7) = x^{11} + y^{11} \end{cases}$

10) $\begin{cases} y + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 12y + 1} = \dfrac{1}{12}(x^2 + 17) \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases}$

Phụ lục 1: GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1 (IMO 1967): Trong 1 cuộc thi đấu thể thao, tổng số huy chương là m, được phát trong n ngày thi đấu. Trong ngày thứ nhất, người ta phát 1 huy chương và $\frac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Ngày thứ hai, người ta phát 2 huy chương và $\frac{1}{7}$ số huy chương còn lại. Những ngày còn lại tương tự. Ngày sau cùng còn lại n huy chương để phát. Tính m, n?

Giải

Giả sử số huy chương còn lại khi bắt đầu ngày thi đấu thứ r là m_r.
Khi đó $m_1 = m, m_n = n$ và $\forall k < n : \frac{6(m_k - k)}{7} = m_{k+1}$
Ta biến đổi:

$$m = 1+2.\frac{7}{6}+3.\left(\frac{7}{6}\right)^2+...+n.\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} = 36\left[1-(n+1).\left(\frac{7}{6}\right)^n + n\left(\frac{7}{6}\right)^{n+1}\right] = 36+\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}$$

Do $(6;7) = 1 \Rightarrow n-6 \vdots 6^{n-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|n-6| \geqslant |6^{n-1}| \\ n-6=0\end{array}\right.$
Dễ thấy chỉ có $n = 6$ thoả. Vậy $m = 36$. □

Bài 2 (APMOPS 2004): Một đồng cỏ phát triển theo một tốc độ không đổi:
200 con cừu ăn hết cỏ trong 100 ngày.
150 con cừu ăn hết cỏ trong 150 ngày.
Hỏi 100 con cừu ăn hết cỏ trong bao nhiêu ngày?

Giải

Giả sử mỗi con cừu ăn hết 1 "miếng" cỏ mỗi ngày, vậy trong 100 ngày 200 con cừu sẽ ăn hết 20000 "miếng" cỏ, tương tự, 150 con cừu sẽ ăn hết 22500 "miếng" cỏ trong 150 ngày.
Đặt x (đơn vị: "miếng" cỏ) là lượng cỏ ở đồng cỏ ban đầu, a là tốc độ mọc cỏ (đơn vi: "miếng" cỏ/ngày), t là thời gian để 100 con cừu ăn hết đồng cỏ (đơn vi: ngày), từ giả thiết, ta có hệ:

$$\begin{cases} x+100a = 20000 \quad (1) \\ x+150a = 22500 \quad (2) \\ x+at = 100t \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $x = 15000$, $a = 50$, vậy từ đây ta dễ dàng suy ra $t = 300$ □.

Bài 3: Một người cha khi chết để lại di chúc phân chia gia tài cho các con là các đồng tiền vàng như sau : con cả được 100 đồng và $\frac{1}{10}$ số còn lại , người con thứ hai được 200 đồng và $\frac{1}{10}$ số còn lại, người con thứ ba được 300 đồng và $\frac{1}{10}$ số còn lại,......Cứ như vậy cho đến khi gia tài được chia hết thì số tiền mỗi con bằng nhau. Hỏi người cha có bao nhiêu đồng tiền vàng, có bao nhiêu con và mỗi người được chia bao nhiêu đồng tiền vàng?

Giải

Gọi số tiền của cha là x (đồng) $(x > 0)$
Con cả được $100 + \dfrac{x-100}{10}$
Con thứ hai được $200 + \dfrac{x - 300 - \dfrac{x-100}{10}}{10}$
Cho $100 + \dfrac{x-100}{10} = 200 + \dfrac{x - 300 - \dfrac{x-100}{10}}{10}$
Giải phương trình trên ta tìm được $x = 8100$ nên có 9 người con và mỗi người con được 900 đồng. □

Bài 4: Một nhóm gồm 21 người đã đi du lịch đến các nước Anh, Pháp,Ý, trong đó mỗi người đi ít nhất 1 nước và không ai đi cả 3 nước, biết rằng:
Số người đã đi được 2 nước Ý và Anh gấp đôi số người đã đi được cả 2 nước Pháp và Ý.
Số người đi được Pháp và Ý lại gấp đôi số người đi Anh và Pháp.
Số người chỉ đi Ý (không đi Pháp và Anh) hơn số người chỉ đi Anh (không đi Pháp và Ý) là một người và bằng số người đã đi Pháp.
Hỏi:
a/ Hãy tìm số người đi đúng 1 nước.
b/ Hãy tìm số người đi ít nhất 1 trong 2 nước Anh và Pháp.

Giải

Gọi A, P, Y là tập hợp số người đi đến các nước Anh, Pháp, Ý. Gọi x, y, z là số người chỉ đi Anh, Pháp, Ý. Gọi t là số người đi cả 2 nước Anh và Pháp, thì số người đi Pháp và Ý là $2t$, còn số người đi 2 nước Ý và Anh là $4t$.
Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z + 7t = 21 \quad (1) \\ z = x + 1 \quad (2) \\ z = y + 3t \quad (3) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow 7t < 21 \Rightarrow t < 3$
Từ $(1); (2); (3) \Rightarrow 3z + 4t = 22 \Rightarrow (t-1) \vdots 3$
Mà $0 \leqslant t < 2 \Rightarrow t = 1$
Khi $t = 1$ thì:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ z = x + 1 \\ z = y + 3 \end{cases}$$

Do đó $(x; y; z) = (5; 3; 6)$

Vậy có 14 người chỉ đi đúng 1 nước, ít nhất 15 người đi ít nhất 1 trong 2 nước Anh và Pháp. □

Bài 5: Một người đi xe đạp điện dọc đường tàu điện và nhận thấy rằng: cứ 7 phút có 1 đoàn tàu chạy cùng chiều với anh ta và cứ 5 phút có 1 đoàn tàu chạy ngược lại. Hỏi cách nhau bao nhiêu phút thì ở ga đầu tiên có 1 đoàn tàu khởi hành? Biết rằng, các đoàn tàu khởi hành sau những khoảng thời gian như nhau và chuyển động với vận tốc không đổi, không dừng lại bất kì nơi nào trên đường và người đi xe đạp điện cũng đi với vận tốc không đổi.

Giải

Đặt t là khoảng thời gian xuất phát giữa 2 tàu điện (tính bằng phút), x, y lần lượt là vận tốc của tàu điện và xe đạp (đơn vị độ dài/phút, $x > y$), ta có khoảng cách giữa 2 tàu điện là xt. Giả sử khi gặp một tàu điện, thì khi đó xe đạp sẽ cách tàu đi ngay sau đó là xt, theo công thức khi 2 xe đi ngược chiều, ta có

$$xt = 5(x + y) \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có

$$xt = 7(x - y) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được $x = 6y$, thế vào (1), ta lại có $6yt = 7(6y - y) \Rightarrow t = \dfrac{35}{6}$

Vậy 2 tàu khởi hành cách nhau $\dfrac{35}{6}$ phút □.

Bài 6: Một hồ nước được cung cấp bởi 3 vòi nước. Biết rằng nếu từng vòi cung cấp nước cho hồ thì vòi thứ nhất làm đầy hồ nhanh hơn vòi thứ hai là 5 giờ, vòi thứ ba lại làm đầy hồ nhanh hơn vòi thứ nhất là 4 giờ. Còn nếu vòi thứ nhất và thứ hai cùng cung cấp nước cho hồ thì thời gian chúng làm đầy hồ bằng thời gian của vòi thứ ba. Hỏi nếu cả 3 vòi cùng cung cấp nước cho hồ thì chúng sẽ làm đầy hồ trong bao lâu?

Giải

Gọi thời gian vòi thứ ba làm đầy hồ là t (giờ), $t > 0$.

Thời gian vòi thứ nhất làm đầy hồ là $t + 4$ (giờ).

Thời gian vòi thứ hai làm đầy hồ là $t + 9$ (giờ).

Trong 1 giờ, vòi thứ nhất và thứ hai chảy được $\dfrac{1}{t+4} + \dfrac{1}{t+9}$ hồ nước và vòi thứ ba chảy được $\dfrac{1}{t}$ hồ nước.

Theo đề bài,ta có phương trình:

$$\frac{1}{t+4} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{t}$$

Tương đương:

$$t(t + 9) + t(t + 4) = (t + 4)(t + 9)$$

Ta tìm được $t = 6$.

Vậy trong 1 giờ, cả ba vòi chảy được:

$$\frac{1}{t+4} + \frac{1}{t+9} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}$$

Vậy nếu cả ba vòi cùng cung cấp nước thì sau 3 giờ hồ sẽ đầy. □

Bài 7: Có 3 đội xây dựng cùng làm chung một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, hai đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất đội I cao hơn năng suất đội II, năng suất đội III là trung bình cộng của năng suất đội I và II. Nếu mỗi đội làm một mình một phần ba công việc thì mất 37 ngày mới xong. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên?

Giải

Gọi thời gian để các đội I, II, III làm riêng xong công việc lần lượt là x, y, z (đơn vị: ngày).
Theo đề bài,ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+12\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \quad (1) \\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y} \quad (2) \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \quad (3) \\ \dfrac{x+y+z}{3}=37 \quad (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $4\left(\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{z}\right)+12.\dfrac{2}{z}=1 \Leftrightarrow z=36$

Từ (3) ta suy ra $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}$, kết hợp với (4) ta sẽ có:

$$\begin{cases} x+y=75 \\ xy=1350 \end{cases}$$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình: $x^2-75x+1350=0 \Rightarrow x_1=30$ và $x_2=45$
Vậy thời gian cần để các đội I, II, III hoàn thành công việc lần lượt là 30 ngày, 45 ngày, 36 ngày.□

Bài 8: Trong kỳ thi học sinh giỏi của trường, nếu sắp mỗi phòng thi 22 học sinh thì thừa 1 em, nếu giảm 1 phòng thi thì số học sinh được chia đều cho mỗi phòng. Tính số học sinh tham gia kỳ thi biết rằng một phòng thi không chứa quá 40 học sinh.

Giải

Gọi số phòng thi là x ($x \in \mathbb{N}$, đơn vị: phòng).
Theo đề bài, nếu sắp mỗi phòng thi 22 học sinh thì thừa 1 em nên tổng số học sinh là $22x+1$ (em).
Số phòng sau khi giảm là $x-1$ (phòng).
Do lúc này số học sinh chia đều cho mỗi phòng nên $22x+1 \,\vdots\, x-1$
Mà $22x+1=22(x-1)+23 \Rightarrow 23 \,\vdots\, x-1 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=24$
Tại $x=2$, số học sinh có là 45 em, khi ấy số học sinh ở mỗi phòng sau khi giảm 1 phòng là 45 em (trái với giả thiết).
Tại $x=24$, số học sinh có là 529 em, điều này phù hợp với đề bài.
Vậy có tất cả 529 học sinh. □

PHỤ LỤC 2: PHƯƠNG TRÌNH VÀ CÁC NHÀ TOÁN HỌC NỔI TIẾNG

I. LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Có mấy cách giải phương trình bậc hai?

Lịch sử phương trình bậc hai bắt nguồn từ nền văn minh Babilon cổ đại (khoảng 1800 năm trước công nguyên). Lúc đó họ đã biết cách giải tất cả các phương trình bậc hai nhưng không diễn đạt trong tập số thực.

Vào khoảng 1500 năm trước công nguyên,trong một tác phẩm của người Ai Cập về các bài toán cụ thể đã có những ví dụ về giải phương trình bậc hai.

Trường phái Pythagores (thế kỷ VI trước công nguyên) đã giải phương trình bậc hai bằng hình học và về sau người ta gọi là phương pháp Pythagores.

Ở thế kỷ III trước công nguyên,người Hy Lạp cổ đại đã biến việc giải phương trình bậc hai thành cơ sở cho toàn bộ hình học của họ và để có thể làm việc trong tập hợp số thực,họ đã thay thế các tính toán của người Babilon bằng các phép dựng hình bằng thước thẳng và compa.Tuy vậy họ chỉ tính toán tập hợp số hữu tỷ dương,cho nên có nhiều phương trình bậc hai họ không giải được.Phải chờ đến thế kỷ XVI,khi xuất hiện số phức thì mới giải được tất cả các phương trình bậc hai.

Ở Trung Hoa cổ đại,cách giải phương trình bậc hai cũng được trình bày trong bộ sách "Sách toán chín chương",trong cuốn "Trương Khâu Kiện toán kinh" và trong cuốn "Sổ thư cửu chương".

Người Hindu thừa nhận một phương trình bậc hai có lời giải thực thì có hai nghiệm hình thức.Họ thống nhất phép giải đại số các phương trình bậc hai bằng phương pháp bổ sung bình phương quen thuộc,do vậy ngày nay phương pháp này được gọi là phương pháp Hindu.

Như ở thời cổ đại,người Babilon,người Ai Cập,người Hy Lạp,người trung Hoa,... đã biết cách giải phương trình bậc hai nhưng công thức nghiệm thì mãi đến năm 825 nhà toán học Al-Khowarizmi mới lập được.Ông đã giải phương trình bậc hai bằng đại số và hình học.Ông viết: $x^2 + px + q = 0$ thành $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$
Từ đó ông đã tìm được nghiệm:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Về sau ông lại giải theo cách khác,ông đặt $z = x + \frac{p}{2}$ và thay vào phương trình đầu để được

$$z^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0$$

Việc giải phương trình này trở thành đơn giản.
Trong chương trình đại số lớp 9 đã có công thức tính nghiệm của phương trình bậc hai dạng chính tắc $ax^2 + bx + c = 0$ bằng cách đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Francois Viete (1540-1603) người Pháp đã đưa ra hệ thức của hai nghiệm này:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Hệ thức này về sau được mang tên ông (hệ thức Viete).



Francois Viete (1540-1603)

Ngoài ra còn có các cách giải phương trình bậc hai bằng hình học sau đây: cách của Sir John Leslie (1766-1832). người Anh trong cuốn "Các cơ sở của hình học", cách của Thomas Carlyde (1795-1881) người Anh, học trò của Leslie,...
Phương trình vô định bậc hai 2 ẩn $y^2 = ax^2 + 1$ trong đó a là số nguyên dương không chính phương được Brahma Gupta và Bhaskara người Ấn Độ giải. Người ta gọi là phương trình Pell.

Lý thuyết đầy đủ về phương trình được Joshep-Louis Lagrange (1736-1813), người Pháp hoàn tất vào 1766-1769.

Cuộc thách đố chấn động thế giới toán học

Như chúng ta đã biết, việc tìm lời giải cho phương trình bậc 3 là khá phức tạp và công thức nghiệm là khá cồng kềnh.
Trong một bản Babilon tìm thấy có các giá trị của $n^3 + n^2$ với $n = 1$ đến $n = 30$ và như vậy chúng ta cũng tìm được nghiệm của 30 phương trình bậc 3 đặc biệt. Nhà toán học Neugebauer tin rằng người Babilon hoàn toàn có thể quy một phương trình bậc 3 tổng quát về dạng "chuẩn" $x^3 + x^2 = c$.

Ở Trung Hoa, bộ sách "Chức cổ toán kinh" của Vương Hiến Chương viết vào đầu thời Đường (thế kỷ VII) có nêu cách giải phương trình bậc 3 tổng quát bằng đại số. Trong bộ sách "Số thư cửu chương", Tần Cửu Thiều cũng đưa ra phương trình bậc 3. Nhưng sau đó, người Trung Hoa đã quá chú ý đến phương pháp đại số trên bàn tính, mà ít chú ý sử dụng các ký hiệu đại số như đang dùng, do vậy từ thế kỷ VII nền toán học Trung Hoa bắt đầu lạc hậu so với Phương Tây.

Omar Khayyam (1048-1122) ở Khorasan đã giải phương trình bậc 3 bằng hình học một cách độc đáo.

Sau Al-Khowarizmi đã có nhiều nhà toán học đi tìm cách giải phương trình bậc 3 một cách miệt mài. Nhưng trải qua suốt 7 thế kỷ, ngoài việc tìm được cách giải của những phương trình khác thì không có bước tiến nào cho việc giải phương trình bậc 3. Vì vậy đã có người tỏ ra chán nản, cho rằng phương trình bậc 3 có thể không có thực. Nhưng giáo sư Scippionel del Ferro (1465-1526) người Italia, Trường đại học Tổng hợp Bologna thì không như vậy. Ông vẫn tiếp tục con đường của mình là để tâm miệt mài nghiên cứu vấn đề hóc búa lúc bấy giờ là giải phương trình bậc 3. Trời đã không phụ ông, vào một ngày "không thể tin được", ông đã tìm ra bước đột phá và đến năm 1505, ông tuyên bố đã tìm ra cách giải đặc biệt cho phương trình:

$$x^3 + mx = n \text{ (với } m, n > 0)$$

Vào thời đó, mọi người đều giữ bí mật cách giải của mình, vì vậy việc Ferro giữ kín bảo bối cũng là điều không có gì lạ. Nhưng đáng tiếc là, ông đã không có dịp nào để công bố thành tựu của mình. Mãi đến khi sắp qua đời, ông mới để lại bí mật này cho người con rể tin cẩn là Anabel Nova. Nhưng về sau, một môn sinh của Ferro là Antonio Fior đã lấy cắp bảo bối của ông.

Trong trường phái Italia thì Fontana (1500-1557) cũng đi tiên phong trong việc tìm cách giải phương trình bậc 3.



Niccolo Tartaglia (1499-1557)

Bây giờ lại nói đến một nhà toán học khác, đó là Niccolo Tartaglia (1499-1557). Thời thơ ấu của ông trôi qua thật nặng nề. Ông sinh ra ở Brescia miền bắc Italia nên được gọi là Niccolo của Brescia và thường được gọi là Tartagli vì lúc nhỏ ông bị quân Pháp làm hại dã man. Lúc ông mới 13 tuổi thì quân Pháp tràn vào Brescia. ông cùng với người cha (lúc đó là người đưa thư) và dân chúng chạy trốn vào ngôi nhà thờ để ẩn nhưng quân Pháp rượt theo và thảm họa đã xảy ra: người cha bị giết chết còn cậu bé bị chém vào hàm và miệng. Vết thương ở vòm miệng làm ông nói năng rất khó khăn nhưng ông có tư chất thông minh lại ham học. Sau khi mẹ ông qua đời, ông phải tự đi tìm đường sống cho mình. Ông học vật lý, toán học và tỏ rõ tài năng rất sớm, được nhiều người thời đó kính phục.
Vào năm 1530 một nhà toán học đã đưa ra cho ông hai câu hỏi mang tính thách thức, nhằm hạ uy tín của ông:
1. Tìm một số mà lập phương cùng với 3 lần bình phương thì bằng 5.
2. Tìm ba số mà trong đó số thứ hai lớn hơn số thứ nhất là 2, số thứ ba lớn hơn số thứ hai là 2 và tích của chúng là 1000.
Đây thực chất là tìm nghiệm của phương trình bậc 3, với phương trình ở câu hỏi 1 là: $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ và câu hỏi 2 là: $x^3 + 6x^2 + 8x - 1000 = 0$ Ông đã tìm được nghiệm của cả hai phương trình này nên ông ngày càng nổi tiếng.
Các môn sinh của Ferro cũng tuyên bố đã giải được phương trình bậc 3. Không ai chịu ai nên cuối cùng các nhà toán học Italia quyết định mở cuộc thách đấu giữa hai bên, mỗi bên đưa ra 30 bài toán làm trong 2 giờ.

Sắp đến ngày thi, Tartaglia cảm thấy nao núng vì ông là người tự học, sợ không bảo vệ được cách giải của mình. Ông suy nghĩ rất nhiều, đưa ra nhiều phương án khác nhau và trước ngày thi 8 ngày, ông đã tim ra phương pháp mới để giải phương trình bậc 3.

Ông học thuộc cách giải mới và nghĩ ra 30 bài toán mà chỉ có cách giải này mới thực hiện được.

Vào ngày 22/2/1535, các nhà toán học kéo về thành phố Milan để dự cuộc so tài. Ba chục bài toán mà mỗi bên đưa ra đều là phương trình bậc 3. Tartaglia đã giải 30 bài toán mà đối phương đưa ra trước giờ quy định, trong khi nhóm môn sinh Ferro không giải được bài nào trong số 30 đề toán của Tartaglia. Như vậy cuộc thi kết thúc và phần thắng tuyệt đối thuộc về Tartaglia.



Girolamo Cardano (1501-1576)

Tin tức được truyền đi làm chấn động cả giới toán học. Ở thành phố Milan có một người đứng ngồi không yên, đó là Girolamo Cardano (1501-1576). Ông không chỉ là thầy thuốc nổi tiếng khắp châu Âu, mà còn là một nhà toán học tài ba, dạy toán và có nhiều công trình nghiên cứu về toán học. Ông chuyên tâm nghiên cứu phương trình bậc 3 nhưng chưa có kết quả. Cho nên khi nghe tin Tartaglia đã giải được phương trình bậc 3, ông hy vọng sẽ được hưởng một phần thành tựu của Tataglia.

Lúc này Tartaglia đã nổi tiếng khắp châu Âu nhưng ông lại không muốn công bố rộng rãi công trình của mình. Ông chỉ viết lại trong tác phẩm "Nguyên tắc hình học", cho nên trong tủ sách của nhiều người khó lòng có được tác phẩm của Tartaglia.

Với thái độ chân tình, hiếu học, sau nhiều lần Cardano đề nghị, năm 1539 Tartaglia đồng ý truyền lại những bí quyết cho Cardano. Nhưng Cardano đã không tôn trọng lời hứa, năm 1545 đã giới thiệu cách giải phương trình bậc 3 với lời giải thích của mình trong cuốn "Ars magna". Cardano viết:

"Khoảng 30 năm trước, Ferro đã tìm được phương pháp giải này, đã truyền lại cho người khác và đã từng tranh luận với Tartaglia, Tartaglia cũng phát hiện được phương pháp này. Tôi đã nhiều lần đề nghị thiết tha và cuối cùng Tartaglia đã truyền đạt cho tôi phương pháp giải nhưng lại không chỉ cho tôi phương pháp chứng minh, vì vậy buộc tôi phải tìm ra nhiều cách chứng minh. Vì nó rất khó, tôi xin mô tả nó như sau:. . . "

Sau đó cuộc tranh cãi về bản quyền cách giải này đã nổ ra gay gắt nhưng cuối cùng lẽ phải đã chiến thắng và người ta công nhận lời giải đó là của Tartaglia. Tuy vậy Cardano vẫn nổi tiếng nhờ công bố cách giải này.

Về sau Cardano còn đưa ra cách giải khác cho phương trình $x^3 + mx = n$ với $m, n > 0$ như sau: Đặt $x = u + v$ thay vào phương trình được:

$$u^3 + v^3 + (3uv + m)(u + v) - n = 0$$

Việc giải phương trình trên tương đương việc giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3uv + m = 0 \\ u^3 + v^3 - n = 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\omega^2 - n\omega - \frac{m^3}{27} = 0$$

Trong một cuốn sách của Trung Quốc lại nói rằng, sau 2 năm Cardano công bố cách giải phương trình bậc 3 thì trong bài "Những câu hỏi và phát minh", Tartaglia đã phê phán thái độ thiếu trung thực của Cardano và yêu cầu thành phố Milan tổ chức tranh luận công khai với Cardano. Đến ngày gặp nhau để tranh luận thì không phải Cardano mà lại là một học trò tài ba của Cardano, đó là Lodovico Ferrari (1522-1565). Ferrari không những nắm được cách giải phương trình bậc 3 mà còn giải được phương trình bậc 4 nên Tartaglia đã chịu thất bại. Từ đó Tartaglia như bị vết thương lòng và ôm hận đến lúc chết.

Trong cuốn "Lịch sử toán học" của Howard Eves người Mỹ xuất bản năm 1969 lại viết: ". . . những lời phản đối mãnh liệt của Tartaglia đến tai Ferrari nên người này đã lập luận cho thầy của mình rằng, Cardano có được thông tin cần cho mình từ Ferro qua một người thứ ba và lên án Tartaglia là ăn cắp ý tứ cùng một nguồn đó. . . "

Cho dù các lời đồn thổi như thế nào nhưng cuối cùng lời giải được lưu truyền đến ngày nay với tên gọi chung là công thức Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Cũng cần nói thêm rằng, công thức trên là công thức nghiệm của phương trình bậc 3 chưa đầy đủ. Tuy nhiên, từ phương trình bậc 3 đầy đủ (chính tắc hay hoàn chỉnh):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

đến phương trình $x^3 + mx = n$ chỉ cần đặt:

$$y = x + \frac{b}{3a}$$

Năm 1572, Bombelli cho công bố một cuốn sách đại số góp phần đáng kể vào việc giải phương trình bậc 3. Trong các sách giáo khoa về lý thuyết các phương trình cho biết rằng, nếu $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ là âm thì phương trình $x^3 + mx = n$ có 3 nghiệm thực. Nhưng trong trường hợp này, các nghiệm đó được biểu thị bằng hiệu của hai căn bậc 3 của các số phức liên hợp. Điều tưởng chừng bất thường này gọi là "trường hợp bất khả quy của phương trình bậc 3" đã làm bận tâm đáng kể các nhà đại số học thời xưa. Bombelli đã chỉ ra tính thực của các nghiệm thoạt nhìn là không thực trong trường hợp bất khả quy.

Trong cuốn "Canon mathematicus seu ad triangula" của Viete xuất bản năm 1579, tác giả có gợi ý một cách giải bằng lượng giác cho trường hợp bất khả quy của các phương trình bậc 3. Trong luận văn của Viete thấy có cách giải rất đẹp sau đây cho phương trình bậc 3:

$$x^3 + 3ax = 2b$$

Phương trình trên là một dạng mà phương trình bậc 3 nào cũng có thể quy về được. Nếu đặt:

$$x = \frac{a}{y} - y$$

thì phương trình trên trở thành:

$$y^6 + 2by^3 = a^3$$

Đây là phương trình bậc 2 của y^3, ta có thể tìm ra y rồi sau đó là x.
Về phương trình $x^3 + 3ax = 2b$ thì Isaac Newton (1642-1727) cũng có cách giải.

Những vinh quang sau khi đã qua đời

Ở châu Âu đến thế kỷ XVI, khoa học tự nhiên đã phát triển rất nhanh chóng. Truyền thuyết tôn giáo cho rằng,Thượng Đế sinh ra thế giới và Trái Đất có hình vuông. Những phát kiến địa lý của Christophe Columbus (1451-1506), Fernand de Magellan (1480-1521) và những người khác đã chứng minh đầy đủ rằng Trái Đất có hình cầu, đó là điều không thể chối cãi được. Phát minh về địa lý của Galileo đã đem lại cho nhân loại những nhận thức mới về vũ trụ. Toán học được suy tôn là "nữ hoàng" của khoa học tự nhiên. Từ thế kỷ XVI đến thế kỷ XVIII xuất hiện hàng loạt các nhà toán học kiệt xuất, họ đã đưa nền toán học lên một đỉnh cao mới. Sự xuất hiện phương pháp tọa độ, ứng dụng của số phức, sáng tạo ra vi-tích phân,... đã kết hợp nghiên cứu thế giới khách quan trong trạng thái tĩnh và động.Vào thời gian đó, cả châu Âu gần như đã bỏ lại đằng sau sự trì trệ của thời Trung Cổ. Trong tiến trình phát triển đó,toán học luôn đi tiên phong.

Nhưng ở nhánh phương trình đại số thì tình hình lại không hoàn toàn như vậy. Do cuộc thách đố chấn động cả thế giới toán học vào đầu thế kỉ XVI nên người ta đã tìm được cách giải phương trình bậc ba, bậc bốn. Từ giữa thế kỷ XVI trở đi, người ta bắt đầu đi sâu nghiên cứu phương trình bậc năm. Các nhà toán học đã phân tích tỉ mỉ cách giải phương trình từ bậc hai đến bậc bốn. Nếu một phương trình có nghiệm viết được bằng công thức đại số của các hệ số thì được gọi là phương trình giải được bằng căn thức. Trước thời Bombelli và Viete người ta đã xác định được công thức tổng quát để tính nghiệm của phương trình từ bậc 1 đến bậc bốn. Không bao lâu, sau khi giải được phương trình bậc ba thì phương trình bậc bốn tổng quát cũng có cách giải đại số. Việc giải phương trình bậc bốn tổng quát quy về việc giải một phương trình bậc ba liên kết.

Năm 1540, Zuanne de Tonini da Coi người Italia đã đề nghị Cardano giải bài toán dẫn đến phương trình bậc bốn nhưng Cardano không giải được, mà học trò là Ferrari lại giải được và sau đó Cardano đã công bố cách giải này trong cuốn "Ars magna" của ông.
Cách giải của Ferrari viết gọn theo cách ký hiệu hiện nay như sau: biến đổi đơn giản sẽ quy một phương trình bậc bốn chính tắc (đầy đủ) về dạng:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Từ phương trình trên, biến đổi được

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

hoặc

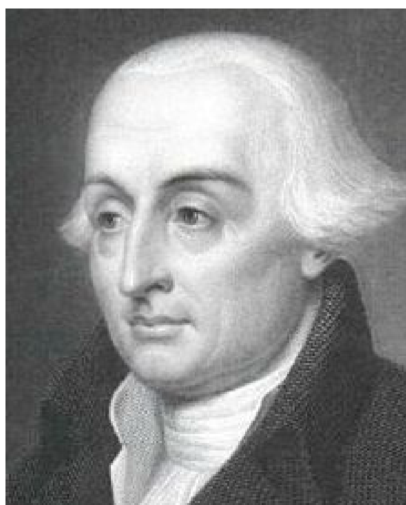
$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

Với y bất kỳ, từ phương trình trên ta có:
$(x^2+p+y)^2 = px^2 - qx - r + p^2 + 2y(x^2+p) + y^2 = (p+2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$
Bây giờ ta chọn y để vế phải của phương trình trên là một bình phương.
Đây là trường hợp khi: $4(p+2y)(p-r-2py+y) - q = 0$
Đây là phương trình bậc ba của y nên đã tìm được cách giải. Một giá trị của y như vậy sẽ quy phương trình bậc bốn lúc đầu về việc chỉ phải lấy các căn bậc hai.

Một cách khác bằng đại số được Viete đề xuất và một cách nữa do Descartes đưa ra năm 1637 nhưng trong nhiều sách giáo khoa đại học đã có thì cách giải của Viete cũng giống như cách giải của Ferrari.

Nhà toán học Vanmec người Tây Ban Nha cũng đã giải được phương trình bậc bốn nhưng tên bạo chúa Tuocmacvada đã thiêu chết ông vì theo hắn, ông đã làm trái ý Trời: phương trình bậc bốn không hợp với khả năng của người trần tục-đó là ý muốn của Trời.
Vì việc giải phương trình bậc bốn tổng quát được thực hiện tùy thuộc vào việc giải phương trình bậc ba liên kết, nên năm 1750 Euler đã cố gắng làm điều tương tự là quy việc giải phương trình bậc năm tổng quát về pháp giải phương trình bậc bốn liên kết nhưng đã thất bại.

Rất nhiều nhà toán học cũng đã vắt óc tìm kiếm cách giải phương trình bậc năm nhưng không đi đến kết quả. Trước tình hình đó, người ta bắt đầu hoài nghi là liệu có tồn tại hay không một công thức tính nghiệm của phương trình bậc năm tổng quát.
Năm 1778, nhà toán học Lagrange đã mở được một đầu mối quan trọng. Ông đã tập trung tìm kiếm công thức chung để giải các phương trình từ bậc hai đến bậc bốn, vì ông cho rằng, nếu tìm được công thức chung đó thì sẽ suy luận để tìm được cách giải phương trình bậc năm. Nhưng cuối cùng ông đã phát hiện thấy nghiệm của một phương trình đã biết có thể được biểu thị bằng một hàm số đối xứng của một phương trình hỗ trợ khác. Phương trình hỗ trợ này được ông gọi là cách giải dự kiến. Dùng cách giải dự kiến này, ông đã sử dụng để giải phương trình bậc ba, bậc bốn nhưng khi đến phương trình bậc năm thì ông đành chịu. Một tia sáng lại lóe trong đầu ông: công thức như vậy là không thể tồn tại được, nhưng ông lại không thể chứng minh điều này.



Joshep-Louis Lagrange (1736-1813)

Phương pháp tổng quát biến đổi một phương trình đa thức bậc n đối với x thành một phương trình bậc n đối với y, trong đó các hệ số của y^{n-1}, y^{n-2} đều bằng 0 được Tschirnhausan (1651-1708) đưa ra. Về sau phép biến đổi phương trình bậc năm như vậy, trong đó các hệ số của y^4, y^3, y^2 đều bằng 0 đã được Brings (1736-1798) đưa ra năm 1786. Điều này đóng vai trò quan trọng trong việc giải phương trình bậc năm bằng hàm eliptic. Năm 1834, Jerrard (mất 1863) lại chứng minh được hệ số của y^{n-3} cũng bằng 0.
Trong các năm 1803, 1805, 1813, nhà vật lý Paolo Ruffini (1765-1822) người italia đã đưa ra một cách chứng minh về một điều mà lúc bấy giờ được coi là một sự kiện, đó là nghiệm của phương trình tổng quát bậc năm hoặc bậc cao hơn đều không thể biểu thị được bằng các căn thức theo các hệ số của phương trình đó.
Loài người đứng trước sự thách thức về trí tuệ hết đời này đến đời khác, cho đến khi xuất nhiện nhà toán học trẻ tuổi Niels Henrik Abel (1802-1829) người Na Uy. Ông là người rất can đảm. Ngay từ thuở nhỏ, ông đã bắt đầu tìm lời giải cho phương trình bậc năm. Nhờ quyết tâm chiến thắng đến cùng nên vào năm 1824 (lúc ông 22 tuổi), ông đã chứng minh được một cách tổng quát rằng, phương trình bậc từ 5 trở lên là không thể có cách giải kiểu căn thức. Với trí tuệ của tuổi trẻ, ông đã tuyên bố với thế giới một cách chân lý: trí tuệ của con người là bất khả chiến thắng.
Nhưng còn đường thành công của Abel hết sức gập gềnh. Tuy có những thành công trong thời gian ngắn ngủi nhưng những gì là đau khổ còn nặng nề hơn. Những vinh quang của ông hầu hết đến sau khi ông qua đời.
Ông sinh ra trong một gia đình mục sư ở nông thôn. Cha mẹ của ông lại đông con và nghèo. Trong số 7 anh chị em, ông là người anh thứ 2. Năm 13 tuổi, ông được đưa vào trong trường dòng. Ngay từ đầu ông đã rất hứng thú với toán học. Năm 1817, trong trường đã xảy ra một sự kiện đặc biệt, trong một đêm đã thay đổi cả cuộc đời ông. Thầy dạy toán của ông, do ngược đãi học trò nên đã bị sa thải. Thay thầy giáo cũ là thầy Homlboe (sinh năm 1795) mới 22 tuổi. Thầy Holmboe đã nhanh chóng phát hiện tài năng toán học của Abel. Khi Abel nêu ra quyết tâm tấn công vào phương trình bậc năm, nhiều người chế diễu, cho rằng "Ếch nhái làm sao lại đòi ăn thịt thiên nga". Vậy mà Holmboe lại rất ủng hộ Abel, động viên ông cố gắng vươn lên.



Niels Henrik Abel (1802-1829)

Năm 1821, Abel thi đậu vào trường đại học. Để thực hiện ý tưởng của mình, ông theo học thầy Gauss. Ban đầu ông học theo cách của những người đi trước, đi tìm cách giải đáp một cách chính diện. Sau nhiều ngày tháng miệt mài, năm 1824 ông đã chứng minh là phương trình tổng quát bậc năm không thể có công thức nghiệm bằng căn thức. Điều làm bận tâm buộc loài người phải suy nghĩ suốt 2 thế kỷ, cuối cùng đã được một thanh niên không có

tiếng tăm giải quyết. Tuy nhiên, điều Abel nêu ra đã không được các tạp chí toán học đăng tải, buộc ông phải tự bỏ tiền ra in ấn. Nhưng những đau khổ của ông không vì thế mà giảm bớt.

Năm 1825, Abel đến nhiều nước châu Âu và đã gõ cửa nhiều nơi nhưng không ở đâu coi ông ra gì cả, kể cả những nơi được gọi là "vương quốc toán học". Cuối cùng ông đến Berlin. Rất may mắn, ở đây ông đã được kỹ sư Klaye hiểu được ý tưởng của ông. Tuy Klaye không hiểu hết nội dung mà Abel trình bày nhưng Klaye lại hiểu được năng lực to lớn của Abel. Năm 1826 Klaye đã giúp Abel cho ra đời tạp chí "Lí luận và toán học". Ba số đầu của tạp chí đã đăng 22 bài phát biểu của Abel, giới thiệu các công trình nghiên cứu toán học của Abel. Những thành tựu xuất sắc của Abel dần dần thu hút sự chú ý của giới toán học châu Âu. Chính vì vậy mà tạp chí này nổi tiếng cho đến tận ngày nay.

Tháng 5/1827, với tấm lòng thương nhớ quê hương Tổ quốc, Abel trở về thủ đô Otslo. Tuy nhiên, ở quê hương thì ông lại không tìm được công việc gì thích hợp. Tháng 9/1828 bốn viện sĩ hàn lâm khoa học Pháp đã yêu cầu vua Salơ XIV giúp đỡ vật chất, tạo điều kiện để Abel nghiên cứu khoa học. Nhưng do vất vả quá độ mà bệnh lao của ông lại tái phát, đe dọa đến tính mạng của ông. Ngày 6/4/1829, ngôi sao sáng rực trên bầu trời đã tắt lặn.

Ngày 9/4/1829, người thân trong gia đình đã nhận được một bức thư từ Berlin gửi đến với nội dung:
"Ông Abel kính mến!
Trường chúng tôi quyết định tôn vinh ông là giáo sư toán học của trường.
Chúc mừng vinh dự đó của ông!"
Nhưng bức thư này đã đến chậm, ông đã qua đời trước đó 3 ngày.
Ngày 28/6/1830, Viện hàn lâm khoa học Pháp đã trao giải thưởng lớn cho Abel.
Đó là những vinh quang sau khi ông qua đời.

Lại có câu chuyện về việc Abel giải phương trình có bậc rất lớn như sau: vị đại sứ Hà Lan có lần đã nói dóc với vua Henry IV rằng, nước Pháp không có nhà toán học nào có thể giải được bài toán do Adrianus Romanus (1561-1615) người Hà lan đặt ra năm 1593, vì bài toán này đòi hỏi phải biết cách giải một phương trình bậc 45. Viete được triệu đến. Sau khi xem xét bài toán, ông nhận ra mối liên hệ lượng giác đặc biệt và đưa ra 2 nghiệm, sau đó thêm 21 nghiệm nữa.

TIỂU SỬ MỘT SỐ NHÀ TOÁN HỌC NỔI TIẾNG

Một cuộc đời trên bia mộ

Người ta không biết gì nhiều về cuộc đời của nhà toán học cổ Hy Lạp là Đi-ô-phăng (Diophante): Ông sống ở thế kỉ III trước Công nguyên, sinh ở A-lếch-xăng-đri, đã để tâm nghiên cứu sâu về phương trình và tóm tắt cuộc đời mình bằng những hàng chữ trên bia mộ như sau:
"Hỡi du khách! Nơi đây yên nghỉ một người tên là Đi-ô-phăng. Và những con số nhiệm màu có thể sẽ nói cho bạn biết về những tháng ngày dài của đời ông. Ông đã sống thơ ngây trong một phần sáu cuộc đời. Một phần mười hai cuộc đời nữa, cằm ông đã lún phún râu. Thêm một phần bảy cuộc đời, ông mang nhẫn cưới trên tay và 5 năm sau, được một đứa con trai xinh xắn. Than ôi, dù rất được thương yêu, người con này đã chết khi anh ta vừa bằng nửa tuổi thọ của cha. Quá đau khổ, người cha bất hạnh chỉ sống thêm bốn năm sau cái chết của con.
Bạn hãy nói đi: ông ta thọ bao nhiêu tuổi và cuộc đời ông ra sao?".
Theo ngôn ngữ phương trình thì khi đạt tuổi thọ của Đi-ô-phăng là ẩn số x, "phiên dịch từng câu trong lời trên bia mộ, ta sẽ được phương trình sau:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

Giải phương trình này, bạn dễ dàng tìm được $x = 84$. Vậy Đi-ô-phăng đã sống 84 năm. Thời niên thiếu của ông (84 : 6) là 14 năm, Vì 84 : 12 = 7 nên ông "có râu" lúc 14 + 7 = 21 (tuổi). Lại do 84 : 7 = 12 nên ông lấy vợ lúc 21 + 12 =33 (tuổi). Ông có con trai lúc 38 (tuổi). Vì người con chỉ sống bằng nửa tuổi thọ của cha nên anh ta chết lúc 42 tuổi. Khi đó, người cha đã 38 + 42 = 80(tuổi). Và ông nhắm mắt lìa đời lúc 80 + 4 = 84 (tuổi).
Thật là một tấm bia độc đáo!

Chỉ vì lề sách quá hẹp!

Ngay từ thời cổ người ta đã biết tam giác có ba cạnh 3, 4, 5 (đơn vị dài) là tam giác vuông vì $3^2+4^2=5^2$ ngoài ra, có vô số số nguyên dương khác thỏa mãn phương trình $x^2+y^2=z^2$.
Chẳng hạn các bộ ba số 6; 8; 10 hay 5; 12; 13... Ta đều biết đây là các số Pi-ta-go. Từ phương trình này, đã nảy ra ý nghĩ: liệu có tìm được các bộ ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình $x^n+y^n=z^n$ (n là số tự nhiên lớn hơn 2) hay không. Ý nghĩ ngày lần đầu tiên đã được Đi-ô-phăng xem xét kĩ, vì vậy phương trình đó có tên gọi là phương trình Đi-ô-phăng.
Người ta đã chứng minh được là với tất cả các số n từ 3, 4... đến 4000, chẳng có các số nguyên x, y, z nào nghiệm đúng phương trình Đi-ô-phăng cả. Riêng Pi-e Phéc-ma (Pierre Fermat, 1601-1665) một nhà toán học Pháp, người đã từng cùng với Pa-xcan tìm ra phép tính xác suất, đã mạnh dạn nghi ngờ: Phương trình Đi-ô-phăng sẽ luôn luôn vô nghiệm, dù n là bất cứ số tự nhiên nào.
Năm 1637, Phéc-ma viết bên lề cuống sách của Đi-ô-phăng rằng ông đã tìm được cách chứng minh rất kì diệu điều nghi ngờ nói trên của mình là đúng, nhưng không ghi ra được chỉ vì... lề cuốn sách quá hẹp.
Từ đó đến nay, hơn ba trăm năm trôi qua, nhiều nhà toán học tốn bao công sức để rồi vẫn chịu bó tay trong việc đi tìm chứng minh của Phéc-ma.



(Pierre Fermat (1601-1665)

Điều nghi ngờ nói trên trở thành một bài toán lịch sử nổi tiếng về phương trình Đi-ô-phăng và có tên gọi bài toán Phéc-ma. Năm 1993, nhà toán học Ăng-đrây Oai (Andrew Wiles) người Anh đã chứng minh được Bài toán Phéc-ma với các công cụ toán học hiện đại và với hơn ... 200 trang giấy.

Hai gương mặt trẻ

Lịch sử của Đại số trong những trang nghiên cứu về phương trình đều giữ mãi bóng dáng của hai chàng trai trẻ thiên tài: Ni-en hen-rích A-ben (Niels Henrik Abel, 1802-1829) nhà toán học Na Uy và E-va-rít Ga-loa (Evariste Galois, 1811-1832) nhà toán học Pháp. Cùng sống hồi đầu thế kỉ XIX, cuộc đời ngắn ngủi của cả hai người cùng để lại những tác phẩm vô giá cho toán học hiện đại.



(Evariste Galois (1811-1832)

Cả A-ben lẫn Ga-loa đều bộc lộ tài năng về toán ngay từ lúc còn ngồi trên ghế nhà trường, cả hai cùng quan tâm đến việc giải các phương trình đại số có bậc lớn hơn hai. Tuy không hề biết đến việc làm của nhau, cả hai cùng gửi công trình của mình đến Viện hàn lâm khoa hoc Pháp, và... cùng gặp rủi ro: Công trình của A-ben bị cất vào tủ lưu trữ, mãi lúc anh đã chết mới có người vô tình đọc và in ra, còn Ga-loa ba lần kiên nhẫn gửi tới mãi đến lần thứ ba mới được nhận trả lại công trình của mình với lời phê "Không thể hiểu được!". A-ben chết âm thầm trong nghèo túng, nhưng để lại tên tuổi trong các "phương trình A-ben" và "nhóm A-ben" của lí thuyết nhóm. Còn Ga-loa chết trong cuộc quyết đấu vì danh dự với bọn khiêu khích, để lại 60 trang thư anh viết trong đêm cuối cùng, trong đó trình bày ngắn gọn mọi kết quả quan trọng nhất anh đã tìm ra khi nghiên cứu phương trình. Lá thư dài này được viết bằng nét chữ vô cùng hối hả, xen giữa nhưng công thức toán là những câu "Tôi vội quá". "Chỉ còn mấy tiếng

đồng hồ nữa thôi", "Tôi không kịp"...
Vậy mà 60 trang thư đó đã mở ra cho các nhà toán hoc thế giới vô số hướng đi, và để lại một lí thuyết về phương trình đại số một ẩn số mang tên lí thuyết Ga-loa.
Bạn hãy nhìn lại năm sinh và năm mất của A-ben và Ga-loa: hai gương mặt thiên tài đó luôn đứng cạnh cánh cửa mở vào lâu đài toán học hiện đại, mãi mãi trẻ trung.

Sống hay chết

Vào năm 1927, Erwin Schrödinger đã viết ra một phương trình cho những sóng lượng tử. Nó phù hợp với những thí nghiệm một cách tuyệt vời đồng thời vẽ nên một bức tranh của một thế giới rất khác lạ, trong đó những hạt sơ cấp như electron không phải là vật thể rõ ràng, mà là những đám mây xác suất. Spin của electron giống như một đồng tiền có thể nửa sấp nửa ngữa cho đến khi nó rơi xuống bàn. Không lâu sau đó, các nhà lí thuyết lại lo lắng không yên trước mọi tính chất lạ lượng tử, ví dụ những con mèo vừa sống vừa chết, và những vũ trụ song song trong đó Adolf Hitler là kẻ chiến thắng cuộc chiến tranh thế giới lần thứ hai.

Cơ học lượng tử không bị ràng buộc với những bí ẩn triết lí như vậy. Hầu như mọi vật dụng hiện đại – máy vi tính, điện thoại di động, máy chơi game, xe hơi, tủ lạnh, lò vi sóng – đều chứa những con chip nhớ gốc transistor, dụng cụ có sự hoạt động dựa trên cơ học lượng tử của chất bán dẫn. Những công dụng mới cho cơ học lượng tử xuất hiện gần như hàng tuần. Các chấm lượng tử - những miếng nhỏ xíu của một chất bán dẫn – có thể phát ra ánh sáng thuộc mọi màu sắc và được sử dụng để ghi ảnh sinh học, trong đó chúng thay thế cho những chất nhuộm truyền thống, thường là độc hại. Các kĩ sư và nhà vật lí đang cố gắng phát minh ra máy vi tính lượng tử, một dụng cụ có thể thực hiện song song nhiều phép tính khác nhau, giống hệt như con mèo vừa sống vừa chết.
Laser là một ứng dụng nữa của cơ học lượng tử. Chúng ta sử dụng chúng để đọc thông tin từ những lỗ nhỏ li ti trên đĩa CD, DVD và đĩa Blu-ray. Các nhà thiên văn sử dụng laser để đo khoảng cách từ Trái đất đến mặt trăng. Thậm chí có thể phóng những tên lửa vũ trụ lên từ Trái đất với sức đẩy là một chùm laser mạnh.

Chương cuối trong câu chuyện này có xuất xứ từ một phương trình giúp chúng ta hiểu ý nghĩa của sóng. Nó bắt đầu vào năm 1807, khi Joseph Fourier nghĩ ra một phương trình cho dòng nhiệt. Ông đã gửi một bài báo về nói về nó đến Viện hàn lâm Khoa học Pháp nhưng bị từ chối. Vào năm 1812, viện hàn lâm Pháp đưa vấn đề nhiệt thành đề tài của giải thưởng hàng năm của viện. Fourier lại gửi một bài báo dài hơn, có hiệu chỉnh – và đã giật giải.

Cái hấp dẫn nhất của bài báo giành giải thưởng của Fourier không phải là phương trình, mà là cách ông giải nó. Một bài toán điển hình là tìm xem nhiệt độ dọc theo một thanh mỏng thay đổi như thế nào theo thời gian, cho biết trước đặc điểm nhiệt độ ban đầu. Fourier có thể giải phương trình này một cách nhẹ nhàng nếu như nhiệt độ biến thiên như một sóng hình sin dọc theo chiều dài thanh. Vì thế, ông biểu diễn một đặc trưng phức tạp hơn là sự kết hợp của những đường hình sin với bước sóng khác nhau, giải phương trình cho mỗi đường cong hình sin thành phần, và cộng tất cả những nghiệm này lại với nhau. Fourier khẳng định phương pháp này đúng cho mọi đặc trưng nhiệt độ bất kì, thậm chí đúng cả với trường hợp trong đó nhiệt

độ có giá trị nhảy cóc. Tất cả những gì phải làm là cộng gộp một số vô hạn những đóng góp từ những đường cong hình sin với tần số lớn dần.



Joseph Fourier (1768-1830)

Dẫu vậy, bài báo mới của Fourier đã bị chỉ trích là không đủ chặt chẽ, và một lần nữa viện hàn lâm Pháp từ chối đăng tải. Vào năm 1822, Fourier phớt lờ mọi phản đối và cho công bố lí thuyết của ông dưới dạng một quyển sách. Hai năm sau đó, ông tự bổ nhiệm mình làm thư kí của viện hàn lâm, dí mũi của ông vào những kẻ chỉ trích ông, và cho đăng bài báo gốc của ông trong tập san của viện. Tuy nhiên, những người chỉ trích chưa chịu dừng lại. Các nhà toán học bắt đầu nhận ra rằng những chuỗi vô hạn là những thứ nguy hiểm; chúng không luôn luôn hành xử giống như những tổng hữu hạn, đẹp đẽ. Việc giải quyết những vấn đề này hóa ra là hết sức khó khăn, nhưng phán quyết cuối cùng là quan điểm của Fourier có thể được làm cho chặt chẽ bằng cách ngoại suy ra những đặc trưng rất không đều. Kết quả là phép biến đổi Fourier, một phương trình xem một tín hiệu biến thiên theo thời gian là tổng của một chuỗi những đường cong hình sin thành phần và tính ra biên độ và tần số của chúng.
Ngày nay, phép biến đổi Fourier ảnh hưởng đến cuộc sống của chúng ta theo vô số kiểu. Chẳng hạn, chúng ta có thể sử dụng nó để phân tích tín hiệu dao động tạo ra bởi một trận động đất và để tính ra những tần số mà năng lượng truyền bởi mặt đất chấn động là lớn nhất. Một bước tiến tới xây dựng những công trình chịu được động đất là đảm bảo rằng tần số riêng của công trình khác với tần số của động đất.
Những ứng dụng khác bao gồm việc loại tạp âm ra khỏi những bản ghi âm cũ, tìm kiếm cấu trúc của ADN bằng ảnh chụp tia X, cải thiện sự thu nhận vô tuyến và ngăn cản những dao động không mong muốn ở xe hơi. Thêm một ứng dụng nữa mà đa số mọi người chúng ta sử dụng thường xuyên mà không để ý, đó là chụp ảnh kĩ thuật số.
Nếu bạn tính xem cần bao nhiêu thông tin để biểu diễn màu sắc và độ sáng của mỗi pixel trong một bức ảnh kĩ thuật số, bạn sẽ phát hiện ra rằng một chiếc camera kĩ thuật số nhồi nhét vào thẻ nhớ của nó lượng dữ liệu nhiều gấp mười lần cái thẻ nhớ có thể chứa. Camera làm công việc này bằng cách sử dụng sự nén dữ liệu JPEG gồm năm bước nén khác nhau. Một trong số chúng là một phiên bản kĩ thuật số của phép biến đổi Fourier, nó hoạt động với một tín hiệu không thay đổi theo thời gian mà thay đổi từ đầu này qua đầu kia bức ảnh. Cơ sở toán học hầu như là giống hệt. Bốn bước còn lại tiếp tục làm giảm dữ liệu thêm nữa, đến khoảng bằng một phần mười lượng ban đầu.
Đây mới chỉ là bảy trong nhiều phương trình mà chúng ta bắt gặp hàng ngày, nhưng không nhận ra chúng đang hiện diện ở đấy. Nhưng sự tác động của những phương trình này đối với lịch sử thì sâu sắc hơn nhiều. Một phương trình thật sự mang tính cách mạng có thể có sự tác động đối với sự tồn tại của loài người lớn hơn cả mọi nhà vua và hoàng hậu có mưu đồ choán

đầy những quyển sử học của chúng ta.

Có (hoặc có thể có) một phương trình, trên hết thảy, mà các nhà vật lí và nhà vũ trụ học đặt hết niềm tin yêu vào đấy: một lí thuyết của tất cả thống nhất cơ học lượng tử và thuyết tương đối. Nổi tiếng nhất trong số nhiều ứng cử viên là lí thuyết siêu dây. Nhưng như mọi người chúng ta đều biết, các phương trình của chúng ta cho thế giới vật chất có lẽ chỉ là những phiên bản đơn giản hóa không bắt giữ được cấu trúc sâu sắc của thực tại. Ngay cả nếu tự nhiên có tuân theo những định luật vạn vật, thì chúng có thể không được biểu diễn dưới dạng những phương trình.

Một số nhà khoa học nghĩ rằng đã đến lúc chúng ta từ bỏ những phương trình truyền thống để theo đuổi những thuật toán – những công thức khái quát hơn để tính toán mọi thứ, kể cả việc ra quyết định. Nhưng cho đến những ngày ấy, nếu có, sự hiểu biết sâu sắc nhất của chúng ta về các định luật của tự nhiên sẽ tiếp tục có dạng thức những phương trình, và chúng ta sẽ học cách tìm hiểu chúng và thích ứng với chúng. Các phương trình có thành tựu của chúng, Chúng thật sự đã làm biến chuyển thế giới và chúng sẽ lại tiếp tục làm thế giới biến chuyển.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu ; Nguyễn Văn Tiến
   Một số chuyên đề đại số bồi dưỡng học sinh giỏi. NXB Giáo dục 2010.

2. Đỗ Thanh Sơn
   Một số chuyên đề hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi. NXB Giáo dục 2010.

3. Nguyễn Văn Mậu ; Trần Nam Dũng ; Nguyễn Đăng Phất ; Nguyễn Thuỷ Thanh
   Chuyên đề chọn lọc: Số phức và áp dụng. NXB Giáo dục 2009

4. Vũ Dương Thụy ; Nguyễn Văn Nho
   40 *năm Olympic Toán học quốc tế.* NXB Giáo dục 2006.

5. Đoàn Quỳnh ; Doãn Minh Cường ; Trần Nam Dũng ; Đặng Hùng Thắng
   Tài liệu chuyên toán Đại số 10. NXB Giáo dục 2010.

6. Nguyễn Văn Mậu
   Phương pháp giải phương trình và bất phương trình. NXB Giáo dục 2010.

7. Đỗ Thanh Sơn
   Một số chuyên đề hình học không gian bồi dưỡng học sinh giỏi. NXB Giáo dục 2010.

8. Vũ Hữu Bình
   Nâng cao và phát triển toán 9. NXB Giáo dục 2006.

9. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

10. *Tuyển tập 10 năm đề thi Olympic 30/4.* NXB Giáo dục 2006.

11. *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam.* NXB Giáo dục 2007.

12. Các tài liệu trên Internet:
    - Nguyễn Tất Thu
      Chuyên đề phương trình- bất phương trình, đặt ẩn phụ đưa vệ hệ phương trình
    - Nguyễn Thành Văn ; Nguyễn Phi Hùng
      Phương pháp đặt ẩn phụ giải phương trình vô tỉ
    - Trương Hồ Minh Duy
      Một phương pháp giải phương trình vô tỉ
    - Lê Sỹ Giảng
      Hệ số bất định trong đa thức
    - Diễn đàn Math.vn
      Tuyển tập 60 bài hệ phương trình

- Phạm Kim Chung
  Các phương pháp giải hệ phương trình
- Đặng Đình Sơn
  Ứng dụng định lý Lagrange

13. Diễn đàn http://mathscope.org.
14. Diễn đàn http://onluyentoan.vn.
15. Diễn đàn http://www.artofproblemsolving.com/Forum.
16. Bách khoa toàn thư mở Wikipedia.